Thomas Weatherby

Woche 9: Die La Place- und Poisson-Gleichungen und die Multipolentwicklung

Theoretische Physik II für Lehramt III

Poisson Gleichung

Gauß'sche Gesetz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Definition von Potential:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(\Phi)$$

Poisson Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

LaPlace Operator

Kartesische Koordinaten:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Zylinderkoordinaten:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Kugelkoordinaten:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Diskussion 1

Der La Place Operator ist:

Poisson-Gleichung vs LaPlace Gleichung

Poisson-Gleichung:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Allgemeingültig
- Schwierig zu Lösen

LaPlace-Gleichung:

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\Delta \Phi = 0$$

- Nur in Freiraum gültig
- Leichter zu Lösen

Diskussion 2

Die unterschiede zwishen der LaPlace und Poisson Gleichung sind:

LaPlace Operator

- Skalar → Skalar
- Linearität (Superpositionsprinzip):

$$\nabla^2 \Phi_1 = -\frac{\rho_1}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = -\frac{\rho_2}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2 \Phi_1 + \nabla^2 \Phi_2 = -\frac{\rho_1}{\varepsilon_0} - \frac{\rho_2}{\varepsilon_0}$$

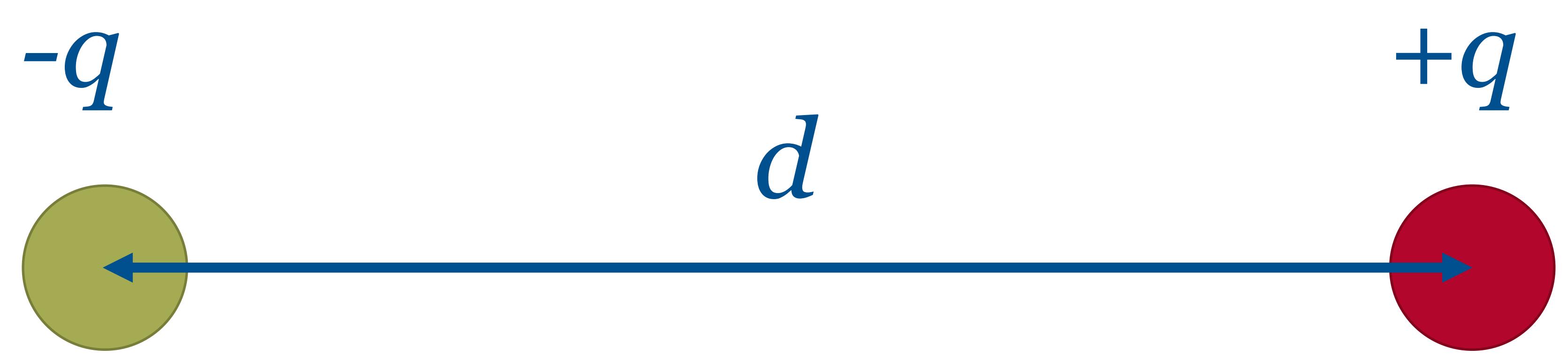
LaPlace Operator – Eindeutigkeitssatz

- Wenn eine Lösung für Poissons-Gleichung bekannten Grenzkonditionen einhalten.
  - Die ist die ***einzige*** Lösung

- Mit etwas Spekulation kann mann eine Lösung erraten und danach testen.

Der Dipol

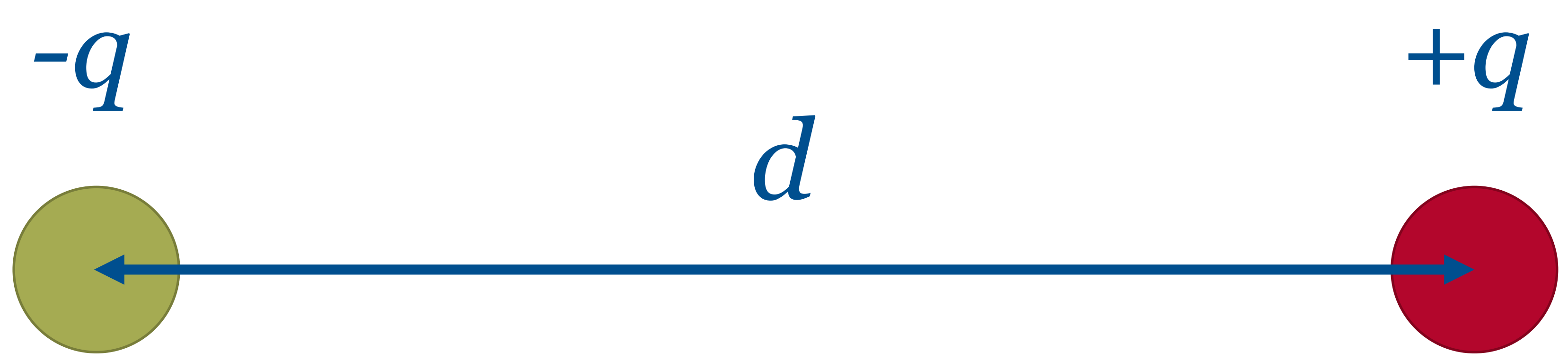
- Zwei Ladungen
  - *-q*, *+q*
  - Mit einer Entfernung *d* von Einander.



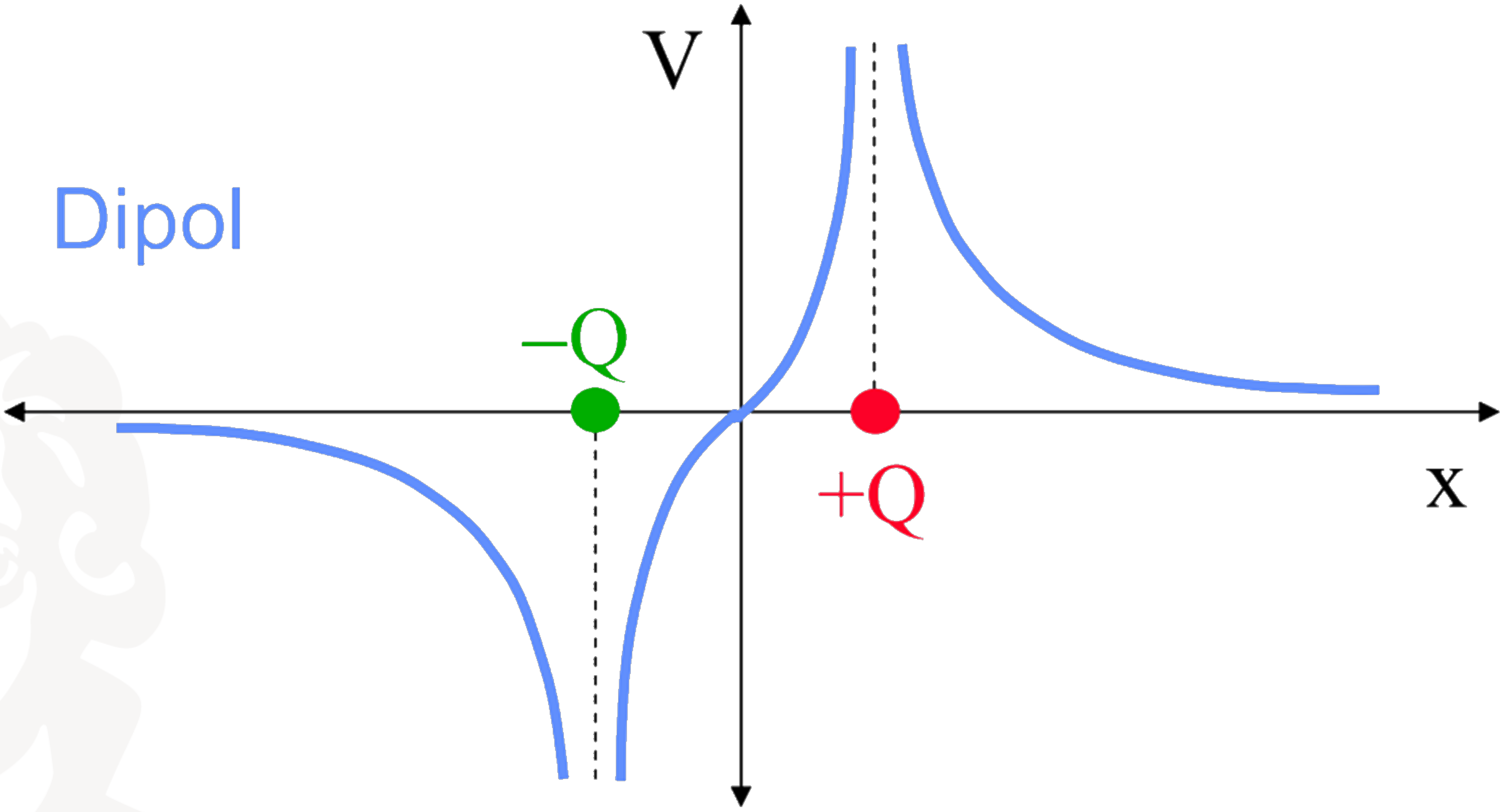
Aufgabe 1

Zeichne das Potential eines Dipols entlang die Achse, die die zwei Ladungen vebindet.

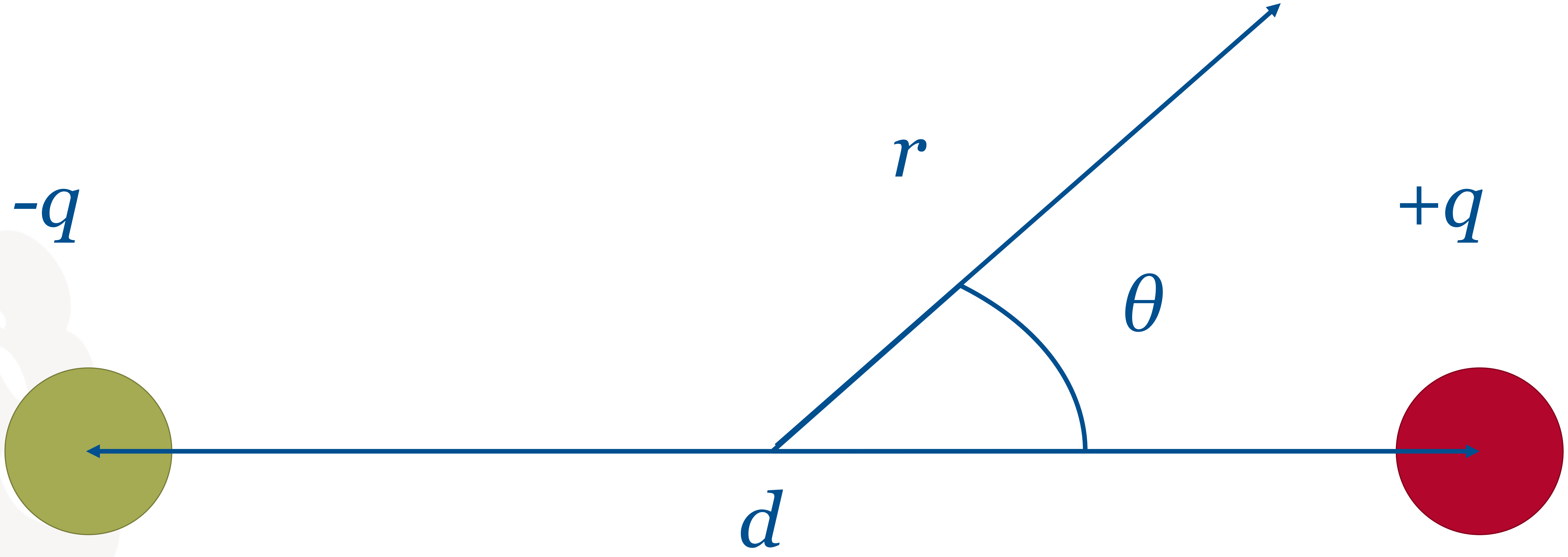
- Potentiale Summieren
- Wie ist das Potenzial einer Punktladung?
- Wie skaliert das Potenzial siner Punktladung mit *r*?
- Zeiche die Potentiale separat und summiere die.



Dipol



Das Potential eines Dipols außerhalb der Verbindungsachse

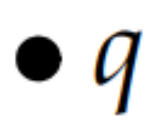


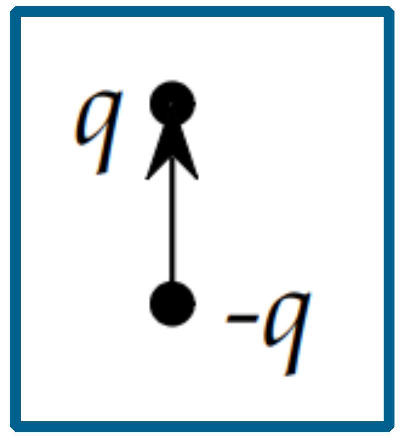
Die Multipolentwicklung

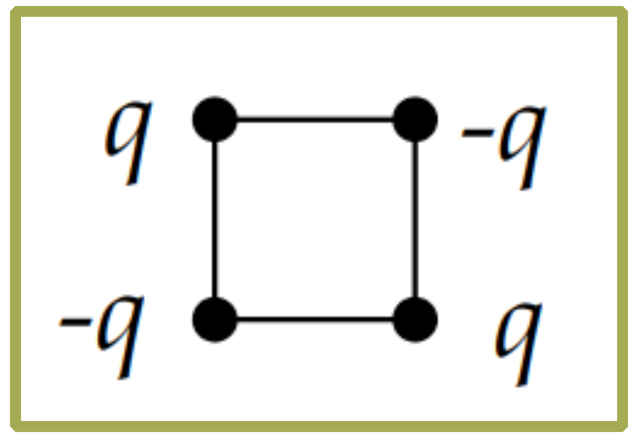
- Benutzt um komplexe systeme zu vereinfachen
- Termen sind eine Taylorreihe
- Termen haben eine physikalische Bedeutung

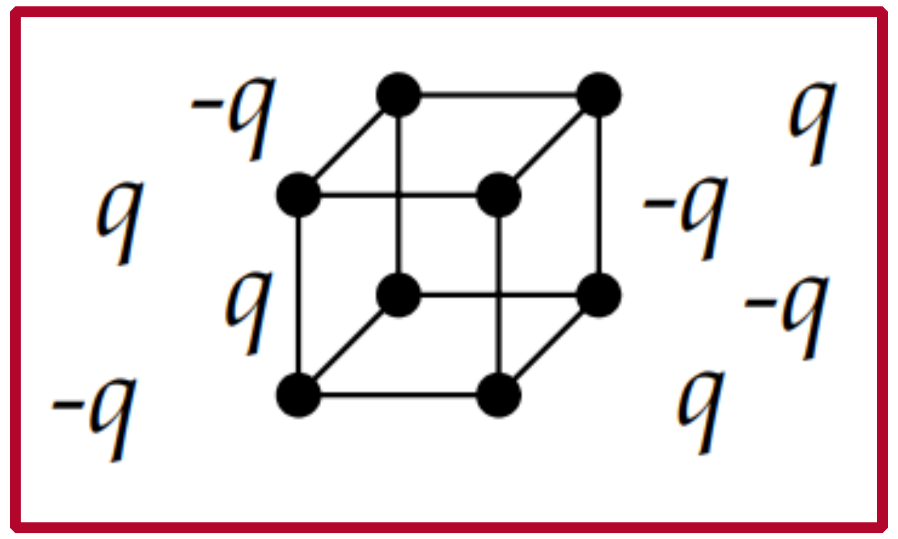
$$\frac{1}{r^2}\int_V \rho(\vec{r}\,')r'\cos\theta\, dVol'$$

$$\frac{1}{r^4}\int_V \rho(\vec{r}\,')r'^4\left(\frac{5}{2}\cos^3\theta - \frac{3}{2}\cos\theta\right)dVol'$$









$$\frac{1}{r}\int_V \rho(\vec{r}\,')dVol'$$

$$\frac{1}{r^3}\int_V \rho(\vec{r}\,')r'^3\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)dVol'$$

Frage zur Multipolentwicklung

Von Griffiths 3.26: Eine auf dem Ursprung zentrieten Kugel mit Radius ***R*** hat eine Ladungsdichte

$$\rho(r,\theta) = k\frac{R}{r^2}(R-2r)\sin\theta$$

k ist eine Konstante und ***r*** und ***θ*** sind die normale Kugelkoordinaten. Finde eine Annäherung für das Potential für großen ***r***.