Vektoroperationen - Zylinder- und Kugelkoordinaten

Thomas Weatherby

Theo II - Woche 5

1 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

1. Ändert das Koordinatensystem wie man nach einem Parameter ableitet?

2 Gradient eines Skalarfeldes

Die Definition des Gradients in Zylinder- und Kugelkoordinaten:

$$\nabla\varphi\left(\rho,\theta,z\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\vec{e}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z \qquad \nabla\varphi\left(r,\theta,\phi\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\left(\theta\right)}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\vec{e}_\phi$$

1. Gesucht ist der Gradient von folgenden skalaren Funktionen:

(a) $$\varphi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(b) $$\varphi\left(\rho,\theta,z\right)=\rho e^{z^{z^2}}$$

(c) $$\varphi(x,y,z)=\ln\left(\frac{z}{x^2+y^2}\right)$$

(d) $$\varphi\left(r,\theta,\phi\right)=r\sin\left(\phi\right)\cos\left(\theta\right)$$

3 Divergenz eines Vektorfeldes

Die Definition des Gradients in kartesischen Koordinaten:

$$\nabla\cdot\vec{F}\left(\rho,\theta,z\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho\vec{F}_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\vec{F}_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\vec{F}_z}{\partial z} \qquad \nabla\cdot\vec{F}\left(r,\theta,\phi\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\vec{F}_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\left(\theta\right)}\frac{\partial\left(\sin\left(\theta\right)\vec{F}_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\left(\theta\right)}\frac{\partial\vec{F}_\phi}{\partial\phi}$$

1. Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

(a) $$\vec{F}=\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho+2\rho z\vec{e}_\theta-\frac{1}{2}\rho z^2\vec{e}_z$$

(b) $$\vec{F}=r\vec{e}_r+\sin\left(\theta\right)\vec{e}_\theta-\sin\left(\theta\right)\cos\left(\phi\right)\vec{e}_\phi$$

(c) $$\vec{F}=x^2\vec{e}_x+y^2\vec{e}_y+z^2\vec{e}_z$$

2. Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder im Punkt $\vec{X}$:

(a) $$\vec{F}=\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho+2\rho z\vec{e}_\theta-\frac{1}{2}\rho z^2\vec{e}_z$$ $$\vec{X}=(3,2,-0.5)$$

(b) $$\vec{F}=r\vec{e}_r+\sin\left(\theta\right)\vec{e}_\theta-\sin\left(\theta\right)\cos\left(\phi\right)\vec{e}_\phi$$ $$\vec{X}=(1,-2,4)$$

(c) $$\vec{F}=x^2\vec{e}_x+y^2\vec{e}_y+z^2\vec{e}_z$$ $$\vec{X}=(1,1,-1)$$

4 Rotation eines Vektorfeldes

Die Definition der Rotation in kartesischen Koordinaten:

$$\nabla\times\vec{F}\left(\rho,\theta,z\right)=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\vec{F}_z}{\partial\theta}-\frac{\partial\vec{F}_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho+\left(\frac{\partial\vec{F}_\rho}{\partial z}-\frac{\partial\vec{F}_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\theta+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho\vec{F}_\theta\right)}{\partial\rho}-\frac{\partial\vec{F}_\rho}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z$$

$$\nabla\times\vec{F}\left(r,\theta,\phi\right)=\frac{1}{r\sin\left(\theta\right)}\left(\frac{\partial\left(\vec{F}_\phi\sin\left(\theta\right)\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial\vec{F}_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\left(\theta\right)}\frac{\partial\vec{F}_r}{\partial\phi}-\frac{\partial\left(r\vec{F}_\phi\right)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(r\vec{F}_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial\vec{F}_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\phi$$

1. Bestimmen Sie die Rotation folgender Vektorfelder:

(a) $$\vec{F}=\ln\left(\frac{z\cdot\sin\left(\theta\right)}{\rho}\right)\left(\vec{e}_\rho+\vec{e}_\theta+\vec{e}_z\right)$$

(b) $$\vec{F}=e^r\cdot\vec{e}_r+e^{\sin\theta}\cdot\vec{e}_\theta+e^{\sin\theta\cos\phi}\cdot\vec{e}_\phi$$

(c) $$\vec{F}=\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{r^2}$$