Vektoroperationen - Kartesische Koordinaten

Thomas Weatherby (Teilweise genommen aus „Vektoranalyse“- Jörg Gayler, Lubov Vassilevskaya)

Theo II - Woche 3

1 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

1. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung folgender Vektorfunktionen:

(a)
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t + t^2 \\ t^3 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

(b)
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t^2 \sin t \\ \sqrt[3]{t} \end{pmatrix}$$

(c)
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{t^2} \\ t \end{pmatrix}$$

2. Was ist die Bedeutung eine sollche Funktion? Wie sieht so eine Funktion aus im 3D-Raum?

2 Gradient eines Skalarfeldes

Die Definition des Gradients in kartesischen Koordinaten:

$$\nabla\varphi\left(x, y, z\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z$$

1. Gesucht ist der Gradient von folgenden skalaren Funktionen:

(a)
$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(b)
$$\varphi(x, y, z) = xe^{z^2 - y}$$

(c)
$$\varphi(x, y, z) = \cos\left(\frac{xy}{z}\right)$$

(d)
$$\varphi(x, y, z) = x\ln y - z\ln x$$

2. Bestimmen Sie die Richtung des größten Anstiegs der Funktion $\varphi(x, y, z) = xz + e^y - \sqrt{z}$ im Punkt $\vec{X} = (-1, 0, 4)$ und die Steigung in dieser Richtung.

3. Was ist die Bedeutung des Gradients eines physikalischen Feldes?

3 Divergenz eines Vektorfeldes

Die Definition des Gradients in kartesischen Koordinaten:

$$\nabla \cdot \left(\vec{F}\left(x, y, z\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{F}_x \\ \vec{F}_y \\ \vec{F}_z \end{pmatrix} = \frac{\partial\vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{F}_z}{\partial z}$$

1. Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

(a)
$$\vec{F} = x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - 3z\vec{e}_z$$

(b)
$$\vec{F} = yz\vec{e}_x + xz\vec{e}_y - xy\vec{e}_z$$

(c)
$$\vec{F} = e^{x^2}\vec{e}_x + e^{x^2}\vec{e}_y + e^{z^2}\vec{e}_z$$

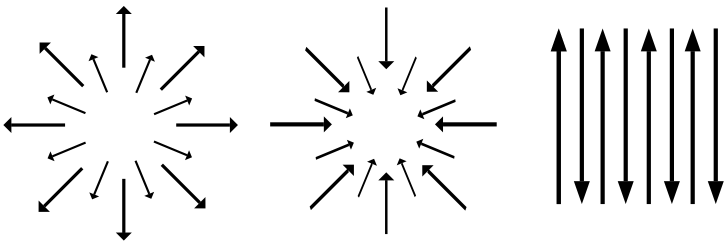
2. Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder im Punkt $\vec{X}$:

(a)
$$\vec{F} = xyz\vec{e}_x + xz\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$
$$\vec{X} = (3, 2, -0.5)$$

(b)
$$\vec{F} = x^3\vec{e}_x + y^2\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$
$$\vec{X} = (1, -2, 4)$$

(c)
$$\vec{F} = e^{r^2}\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$$
$$\vec{X} = (1, 1, -1)$$

3. Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder (A, B, C)?



Wikipedia

4 Rotation eines Vektorfeldes

Die Definition der Rotation in kartesischen Koordinaten:

$$\nabla \times \left(\vec{F}\,(x,y,z)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{F}_x \\ \vec{F}_y \\ \vec{F}_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \vec{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \vec{F}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \vec{F}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial z}\right)$$

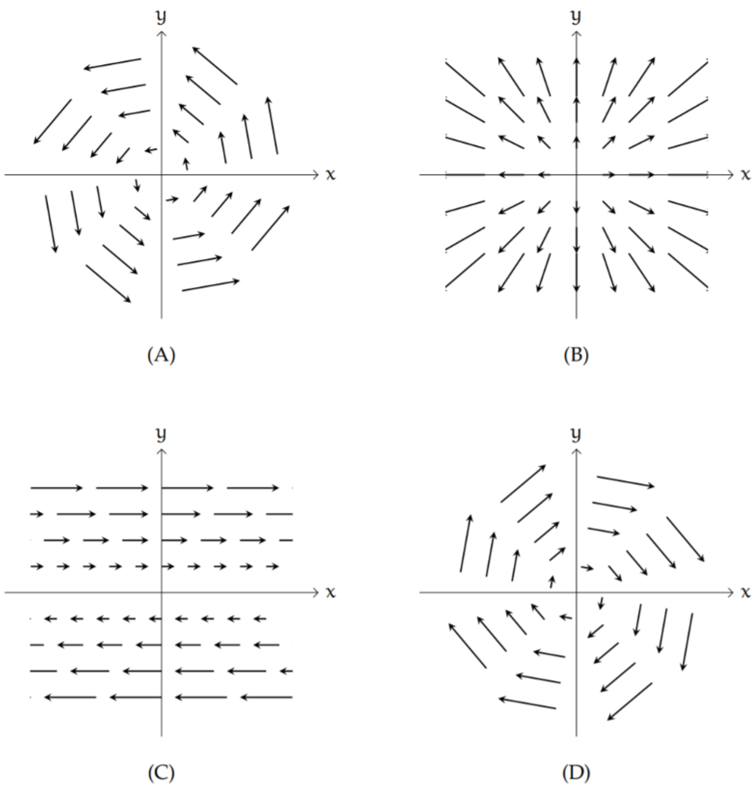
1. Bestimmen Sie die Rotation folgender Vektorfelder:

   (a) $\vec{F} = \ln{(xy)}\vec{e}_x + \ln{(yz)}\vec{e}_y + \ln{(xz)}\vec{e}_z$

   (b) $\vec{F} = e^{xy} \cdot \vec{e}_x + e^{yz} \cdot \vec{e}_y + e^{xz} \cdot \vec{e}_z$

   (c) $\vec{F} = \dfrac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{r^2}$

2. Sind die Divergenz und die Rotation am Ursprung in der folgenden Vektorfelder > 0, < 0 oder $= 0$?



chegg.com