GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Thomas Weatherby

Theo I: 8. Lagrange-Formel

Wiederholung

1. Was ist das effektive Potenzial?
   - Zeichne ein Schwerkraftspotenzial (*U*-*r*) und dazu die Energie der (kreisförmigen) Umlaufbahn (*E* als Funktion von *r*).
   - Zeichne jetzt das effektive Potenzial.
2. Warum ist es wichtig?
   - Warum ist der Umkehrpunkt wichtig?

Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonische Prinzip)

Wir haben Koordinaten die den Zustand unseres Systems beschreiben:

$$q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$$

Wirkung wird folgend definiert:

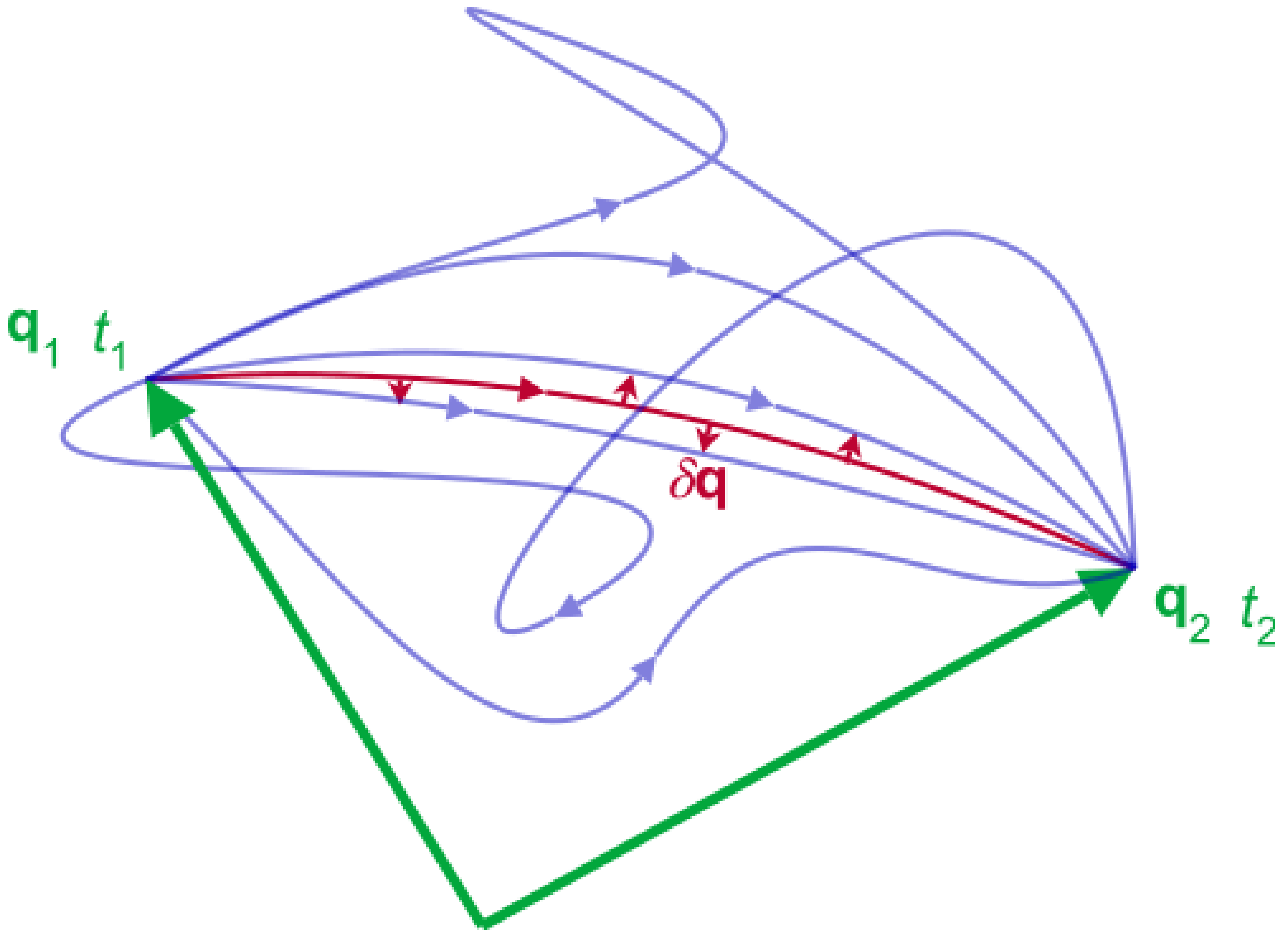
$$\mathcal{S}[q, t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt$$

Genauer definiert ist der Prinzip der kleinsten Wirkung falsch genannt, stattdessen wäre Prinzip der stationären Wirkung richtiger, da:

$$\partial \mathcal{S} = 0$$

Oder:

$$\partial \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$$



Lagrange Gleichung (zweite Art)

$$L = T - V;$$

$T =$ Kinetische Energie (des Systems)
$V =$ Potenzial (des Systems)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$q =$ z.B. x

Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Homogenität in der Zeit: **Energieerhaltung**
Homogenität des Raumes: **Impulserhaltung**
Isotropie des Raumes: **Drehimpulserhaltung**

Aufgabe 1

Betrachten Sie ein Fadenpendel der Länge d, das in drei Raumrichtungen unter Einfluss der Schwerkraft frei schwingen kann. Die Masse des Pendelkörpers sei m, die Masse des Fadens zu vernachlässigen.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten auf.

(b) Ermitteln Sie die Symmetrien des Systems und die entsprechenden Erhaltungsgrößen.

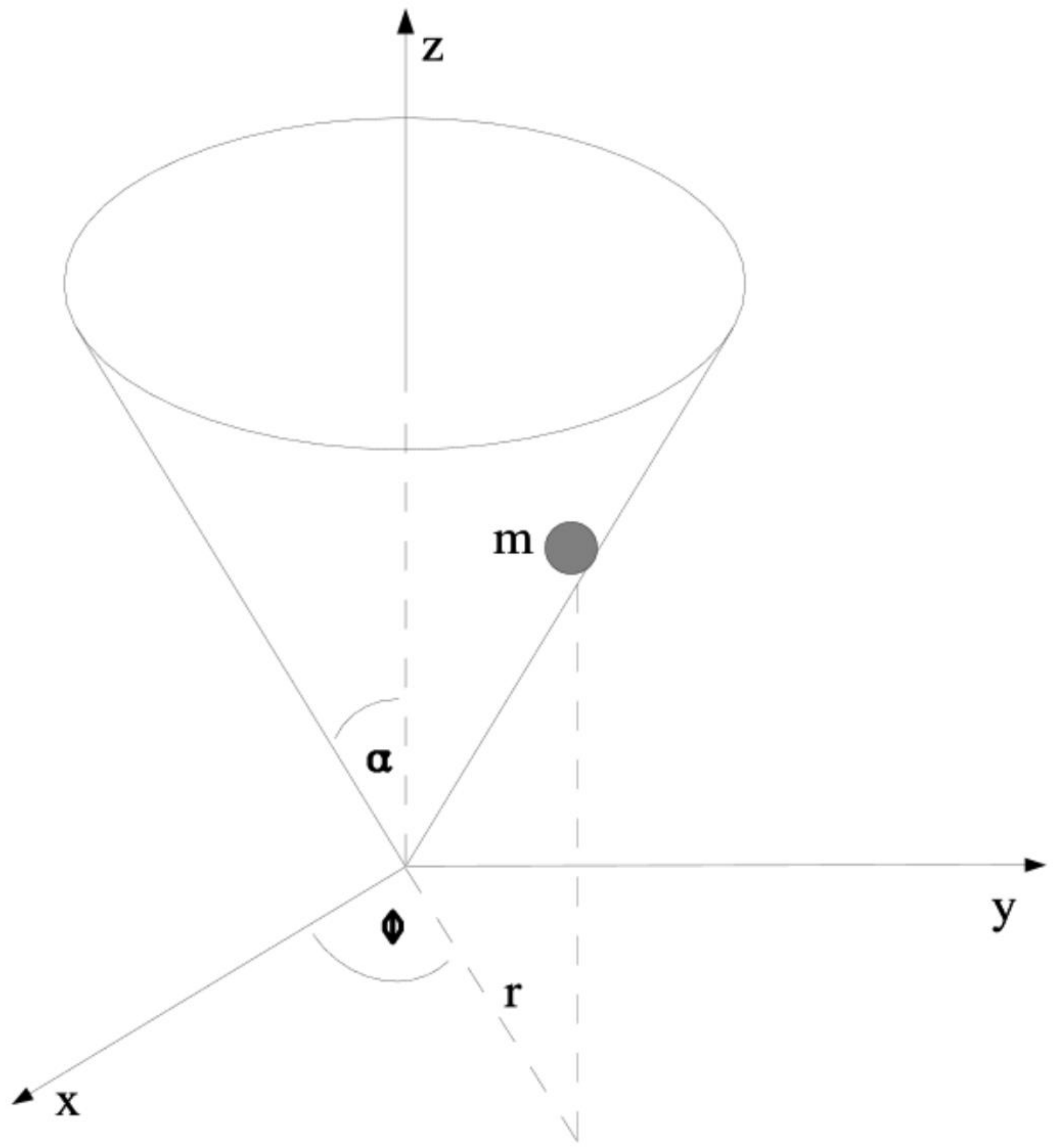
(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

Aufgabe 2

Eine Punktmasse *m* rollt reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels unter dem Einfluss der Schwerkraft.

(a) Geben Sie explizit die Zwangsbedingungen an.

(b) Geben Sie die Lagrangefunktion an und stellen Sie die Bewegungsgleichung auf



Aufgabe 3

Ein homogenes Seil der Länge L liegt zur Hälfte auf einem Tisch, die andere Hälfte hängt über der Tischkante. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen und beginnt reibungsfrei hinunterzurutschen. Die lineare Massendichte sei μ.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und integrieren Sie diese.