

Trägheitsmoment und Satz von Steiner

Dr. Thomas Sean Weatherby

Theo I – Woche 10

Werkzeuge für dieses Blatt.

Für eine Massendichte $\rho(\vec{x})$ ist der Schwerpunkt

$$\vec{x}_S = \frac{1}{M} \int_K \rho(\vec{x}) \vec{x} d^3x, \quad M = \int_K \rho(\vec{x}) d^3x.$$

Der Trägheitstensor bezüglich des Ursprungs ist

$$I_{jk} = \int_K \rho(\vec{x}) (\vec{x}^2 \delta_{jk} - x_j x_k) d^3x.$$

Für eine ebene Fläche ersetzt man ρd^3x durch σdA . Für eine Verschiebung des Bezugspunktes vom Schwerpunkt S zu einem Punkt P mit $\vec{r} = \vec{SP}$ gilt der Tensor-Satz von Steiner

$$I_{jk}^{(P)} = I_{jk}^{(S)} + M (r^2 \delta_{jk} - r_j r_k).$$

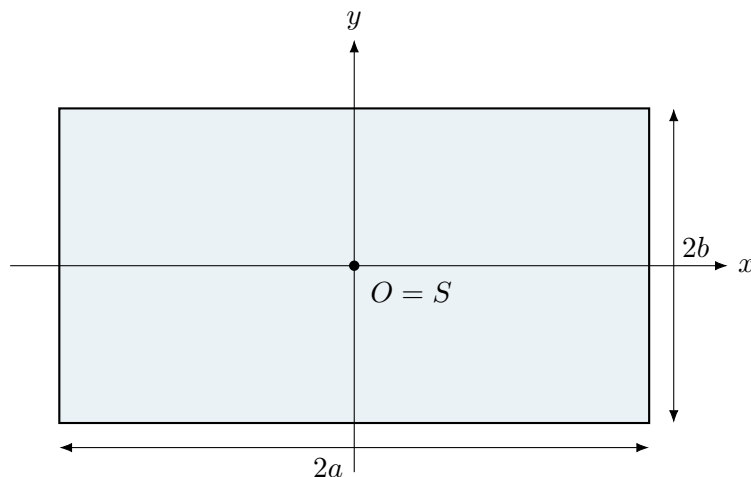
Für eine einzelne Achse mit Abstand d ist das die bekannte Form

$$I_P = I_S + Md^2.$$

1 Direktes Integrieren

Aufgabe 1: Rechteckige Platte mit konstanter Flächendichte

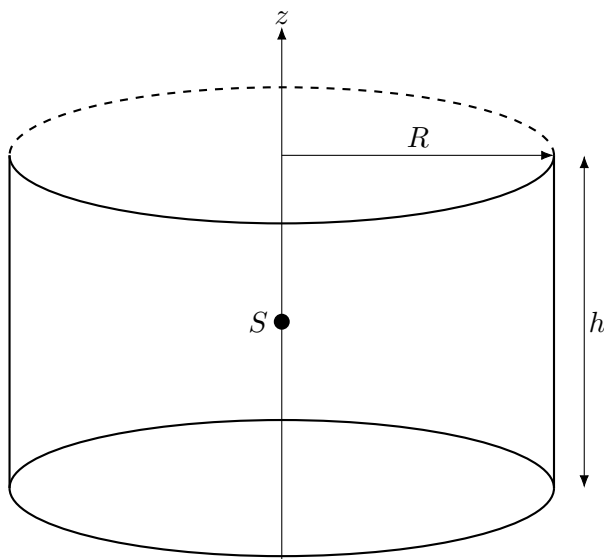
Eine dünne homogene rechteckige Platte liegt in der xy -Ebene. Ihre Seitenlängen sind $2a$ und $2b$, ihr Mittelpunkt liegt im Ursprung, und ihre Flächendichte sei konstant σ_0 .



1. Stellen Sie M als Integral auf und drücken Sie σ_0 durch M, a, b aus.
2. Berechnen Sie I_{11} , I_{22} , I_{33} bezüglich des Ursprungs.
3. Berechnen Sie die Produkte I_{12} , I_{13} , I_{23} . Begründen Sie jeweils mit Symmetrie, bevor Sie integrieren.
4. Schreiben Sie den vollständigen Trägheitstensor $\mathbf{I}^{(S)}$ als Matrix.
5. Prüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem Satz der senkrechten Achsen für ebene Körper: $I_{33} = I_{11} + I_{22}$.

Aufgabe 2: Vollzylinder mit konstanter Massendichte

Ein homogener Vollzylinder mit Radius R , Höhe h und Gesamtmasse M liegt symmetrisch um die z -Achse. Der Schwerpunkt liegt im Ursprung, also gilt $z \in [-h/2, h/2]$.



1. Schreiben Sie das Volumenelement in Zylinderkoordinaten auf und bestimmen Sie ρ_0 aus M .
2. Berechnen Sie I_{33} durch Integration über Kreisscheiben oder direkt in Zylinderkoordinaten.
3. Berechnen Sie I_{11} und I_{22} . Nutzen Sie dabei Symmetrie so weit wie möglich.
4. Begründen Sie, warum alle Nichtdiagonalelemente verschwinden.
5. Schreiben Sie den Trägheitstensor $\mathbf{I}^{(S)}$ als Matrix.

Aufgabe 3: Rechteckige Platte mit ortsabhängiger Dichte

Eine dünne Platte liegt wieder in der xy -Ebene mit $-a \leq x \leq a$ und $-b \leq y \leq b$. Die Flächendichte ist nun nicht konstant, sondern

$$\sigma(x, y) = \sigma_0 \left(1 + \lambda \frac{x}{a} \right), \quad |\lambda| < 1.$$

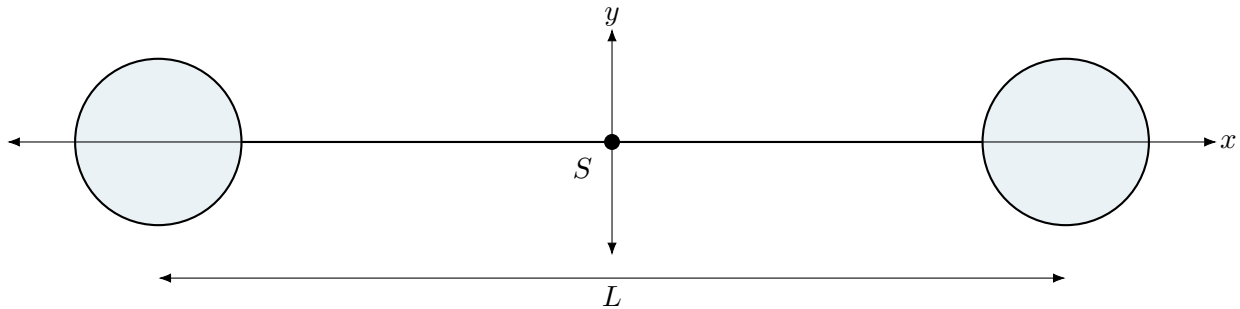
Die Platte ist rechts schwerer, falls $\lambda > 0$.

1. Zeigen Sie, dass die Gesamtmasse M unabhängig von λ ist.
2. Berechnen Sie den Schwerpunkt $\vec{x}_S = (x_S, y_S, 0)$.
3. Berechnen Sie den Trägheitstensor $\mathbf{I}^{(O)}$ bezüglich des Ursprungs.
4. Verschieben Sie den Tensor mit dem Satz von Steiner zum Schwerpunkt S . Welche Komponenten ändern sich?
5. Erklären Sie in Worten, warum der Ursprung nicht mehr der Schwerpunkt ist, obwohl das Integrationsgebiet symmetrisch ist.

2 Satz von Steiner für zusammengesetzte Körper

Aufgabe 4: Zwei Kugeln und ein dünner Stab

Zwei homogene Vollkugeln mit Radius R und Masse m sind durch einen dünnen homogenen Stab der Länge L und Masse m_s verbunden. Die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf der x -Achse bei $x = \pm L/2$. Der Stab liegt ebenfalls auf der x -Achse. Gesucht ist der Trägheitstensor des Gesamtkörpers bezüglich des Gesamtschwerpunkts S , der im Ursprung liegt.



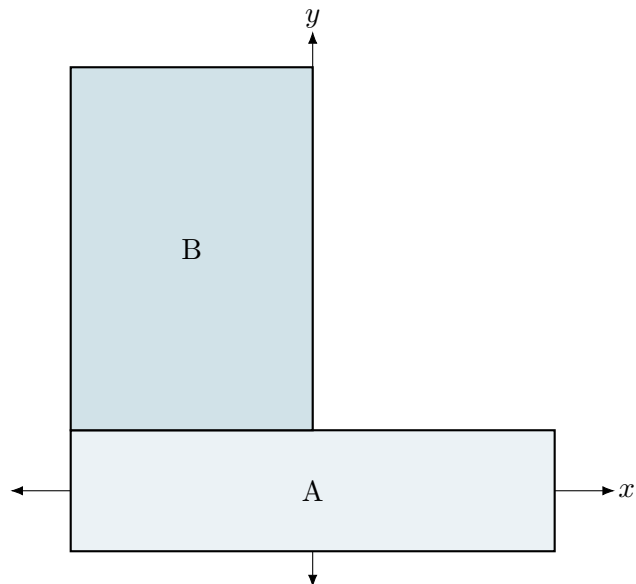
1. Notieren Sie die bekannten Schwerpunkt-Tensoren einer Vollkugel und eines dünnen Stabes.
2. Berechnen Sie den Beitrag jeder Kugel zu $\mathbf{I}^{(S)}$ mit dem Satz von Steiner.
3. Berechnen Sie den Beitrag des Stabes zu $\mathbf{I}^{(S)}$.
4. Addieren Sie die drei Tensoren.
5. Welche Achse hat das kleinste Trägheitsmoment? Begründen Sie physikalisch.

Aufgabe 5: L-förmige dünne Platte

Eine L-förmige dünne Platte mit konstanter Flächendichte σ_0 entsteht aus zwei Rechtecken:

- Rechteck A: Breite $2a$, Höhe b , Mittelpunkt bei $(0,0)$.
- Rechteck B: Breite a , Höhe $2b$, Mittelpunkt bei $(-a/2, 3b/2)$.

Die beiden Rechtecke berühren sich an einer Kante und überlappen nicht. Die Platte liegt in der xy -Ebene.



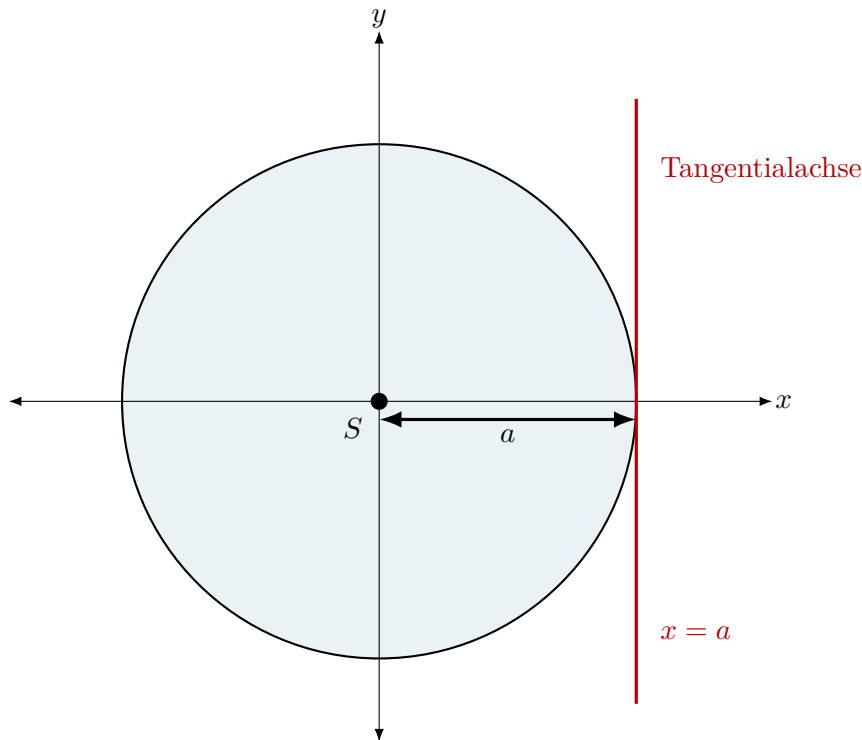
1. Berechnen Sie die Massen M_A , M_B und den Gesamtschwerpunkt S .
2. Schreiben Sie die Schwerpunkt-Tensoren $\mathbf{I}_A^{(S_A)}$ und $\mathbf{I}_B^{(S_B)}$ der beiden Rechtecke auf.
3. Verschieben Sie beide Tensoren mit dem Tensor-Satz von Steiner zum Gesamtschwerpunkt S .
4. Addieren Sie die Tensoren zum Trägheitstensor der L-Platte.
5. Entscheiden Sie, ob I_{12} verschwindet. Begründen Sie geometrisch.

Aufgabe 6: Dünne Kreisscheibe, senkrechter Achsensatz und Steiner

Eine homogene dünne Kreisscheibe mit Radius a und Masse M liegt in der xy -Ebene. Ihr Mittelpunkt S liegt im Ursprung. Aus der direkten Ringintegration ist bekannt:

$$I_{zz}^{(S)} = \frac{1}{2}Ma^2.$$

In dieser Aufgabe verwenden Sie zuerst Symmetrie und den Satz der senkrechten Achsen. Danach verschieben Sie die Achse mit dem Satz von Steiner.



1. Begründen Sie mit Rotationssymmetrie in der Scheibenebene, warum $I_{xx}^{(S)} = I_{yy}^{(S)}$ gilt.
2. Verwenden Sie den Satz der senkrechten Achsen für ebene Körper:

$$I_{zz}^{(S)} = I_{xx}^{(S)} + I_{yy}^{(S)}.$$

Bestimmen Sie daraus $I_{xx}^{(S)}$ und $I_{yy}^{(S)}$.

3. Begründen Sie, warum die Nichtdiagonalelemente des Trägheitstensors verschwinden.
4. Schreiben Sie den vollständigen Trägheitstensor $\mathbf{I}^{(S)}$ der Scheibe als Matrix.
5. Bestimmen Sie mit dem Satz von Steiner das Trägheitsmoment um die Tangentialachse $x = a$, die parallel zur y -Achse durch den Rand der Scheibe läuft.
6. Kontrollfrage: Warum darf man für die Tangentialachse nicht $I_{zz}^{(S)} + Ma^2$ verwenden?