

Lagrange-Mechanik und Noether-Theorem

Dr. Thomas Sean Weatherby

Theo I – Lagrange-Aufgaben: Lösungen

Quellenorientierung: MIT Lecture 16 für Pendel, fallenden Stab und Wagen-Feder-Pendel; Morin, chap6.pdf für Federpendel, Perle auf rotierendem Stab, Atwood-Maschine und Noether-Beispiele; Dutta, lagrangian.pdf für rollenden Zylinder, gekoppelte Oszillatoren und effektive Masse.

1 Einfaches Pendel

1. Die Zwangsbedingung lautet

$$x^2 + y^2 = l^2.$$

Mit der Konvention “Winkel gegen die nach unten zeigende Vertikale” kann man schreiben

$$x = l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta.$$

2. Die Geschwindigkeit ist $v = l\dot{\theta}$. Also

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2.$$

3. Bei Nullniveau im tiefsten Punkt ist die Höhenänderung

$$h = l(1 - \cos \theta),$$

also

$$V = mgl(1 - \cos \theta).$$

4. Die Lagrangefunktion ist

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta).$$

Äquivalent darf man eine additive Konstante weglassen und $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$ verwenden.

5. Die Euler-Lagrange-Gleichung ergibt

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl \sin \theta = 0,$$

also

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

6. Für kleine Auslenkungen gilt $\sin \theta \simeq \theta$. Damit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0,$$

also ein harmonischer Oszillator mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

7. Da L nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Energie erhalten:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta).$$

8. θ ist nicht zyklisch, weil L über den Term $mgl \cos \theta$ bzw. $mgl(1 - \cos \theta)$ explizit von θ abhängt.

9. Nach Noether führt Zeittranslationssymmetrie zur Energieerhaltung. Eine Rotationssymmetrie um den Aufhängepunkt liegt im Schwerfeld nicht vor, weil die Richtung von $\vec{g}$ ausgezeichnet ist. Daher ist der Drehimpuls um den Aufhängepunkt im Allgemeinen nicht erhalten; die Gewichtskraft übt ein Drehmoment aus.

2 Fallender Stab auf glattem Boden

1. Der Schwerpunkt liegt in der Mitte des Stabes. Daher ist

$$y_C = \frac{L}{2} \sin \varphi.$$

2. Die Schwerpunktkoordinaten sind

$$(x_C, y_C) = \left(x_C, \frac{L}{2} \sin \varphi \right).$$

Damit

$$\dot{y}_C = \frac{L}{2} \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \frac{L^2}{4} \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2.$$

3. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} \left(I_C + \frac{1}{4} M L^2 \cos^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2.$$

Mit $I_C = \frac{1}{12} M L^2$ folgt

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} M L^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2.$$

4. Die potentielle Energie ist

$$V = M g y_C = \frac{1}{2} M g L \sin \varphi.$$

5. Somit

$$L = \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} \left(I_C + \frac{1}{4} M L^2 \cos^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} M g L \sin \varphi.$$

6. Für x_C gilt

$$\frac{\partial L}{\partial x_C} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C} = M \dot{x}_C.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{d}{dt}(M \dot{x}_C) = 0.$$

7. Daraus folgt

$$p_{x_C} = M \dot{x}_C = \text{const..}$$

8. Für φ erhält man

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_C + \frac{1}{4} M L^2 \cos^2 \varphi \right) \dot{\varphi}$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{1}{4} M L^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} M g L \cos \varphi.$$

Damit

$$\left(I_C + \frac{1}{4} M L^2 \cos^2 \varphi \right) \ddot{\varphi} - \frac{1}{4} M L^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M g L \cos \varphi = 0.$$

9. Die Normalkraft ist eine Zwangskraft. Bei einer virtuellen Verschiebung, die mit der Bodenbedingung verträglich ist, verrichtet sie keine virtuelle Arbeit in den erlaubten Koordinaten. Deshalb muss sie in $L = T - V$ nicht als eigene Kraft erscheinen.
10. p_{x_C} ist erhalten, weil das System gegenüber horizontalen Translationen invariant ist. Nicht vorhanden ist eine vertikale Translationssymmetrie und auch keine allgemeine Rotationssymmetrie, da Boden und Schwerfeld ausgezeichnete Richtungen festlegen.

3 Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt und Feder

1. Für die Pendelmasse gilt

$$x_m = x + s \sin \theta, \quad y_m = -s \cos \theta.$$

2. Ableiten liefert

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= \dot{x} + \dot{s} \sin \theta + s \dot{\theta} \cos \theta, \\ \dot{y}_m &= -\dot{s} \cos \theta + s \dot{\theta} \sin \theta.\end{aligned}$$

Damit

$$v_m^2 = (\dot{x} + \dot{s} \sin \theta + s \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (-\dot{s} \cos \theta + s \dot{\theta} \sin \theta)^2.$$

Ausmultipliziert:

$$v_m^2 = \dot{x}^2 + \dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \sin \theta + 2\dot{x}s\dot{\theta} \cos \theta.$$

3. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mv_m^2,$$

also

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) + m\dot{x}(\dot{s} \sin \theta + s\dot{\theta} \cos \theta).$$

4. Die potentielle Energie ist

$$V = -mgs \cos \theta + \frac{1}{2}k(s-l)^2.$$

5. Damit

$$L = T - V$$

mit

$$L = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + s^2\dot{\theta}^2) + m\dot{x}(\dot{s} \sin \theta + s\dot{\theta} \cos \theta) + mgs \cos \theta - \frac{1}{2}k(s-l)^2.$$

6. Da L nicht von x abhängt,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0.$$

Hier ist

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m(\dot{s} \sin \theta + s\dot{\theta} \cos \theta).$$

Also

$$\frac{d}{dt} [(M+m)\dot{x} + m(\dot{s} \sin \theta + s\dot{\theta} \cos \theta)] = 0.$$

7. Erhalten ist

$$p_x = (M+m)\dot{x} + m(\dot{s} \sin \theta + s\dot{\theta} \cos \theta).$$

8. x ist zyklisch, weil L von x selbst nicht abhängt, sondern nur von $\dot{x}$.

9. Der Ausdruck ist der gesamte horizontale Impuls von Wagen und Pendelmasse:

$$p_x = M\dot{x} + m\dot{x}_m.$$

10. Horizontale Verschiebungen $x \mapsto x + \varepsilon$ ändern die Physik nicht. Nach Noether gehört zu dieser kontinuierlichen Translationssymmetrie die Erhaltung des horizontalen Gesamtimpulses.

4 Federpendel in der Ebene

1. Die Federlänge ist $\ell + x$. Die kinetische Energie zerfällt in radialen und tangentialen Anteil:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\ell + x)^2\dot{\theta}^2.$$

2. Die potentielle Energie ist

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mg(\ell + x)\cos\theta.$$

3. Also

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\ell + x)^2\dot{\theta}^2 + mg(\ell + x)\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2.$$

4. Für x :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx.$$

Damit

$$m\ddot{x} = m(\ell + x)\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - kx.$$

5. Für θ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(\ell + x)^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg(\ell + x)\sin\theta.$$

Also

$$\frac{d}{dt} [m(\ell + x)^2\dot{\theta}] = -mg(\ell + x)\sin\theta.$$

Äquivalent, falls $\ell + x \neq 0$:

$$(\ell + x)\ddot{\theta} + 2\dot{x}\dot{\theta} = -g\sin\theta.$$

6. Der Term

$$m(\ell + x)\dot{\theta}^2$$

in der radialen Gleichung ist der Zentripetal- bzw. im mitrotierenden Bild der Zentrifugalterm.

7. Nein. Wegen des Terms $mg(\ell + x)\cos\theta$ hängt L explizit von θ ab.

8. Erhalten ist die Energie:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\ell + x)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mg(\ell + x)\cos\theta.$$

9. Ohne Schwerkraft wäre das System rotationssymmetrisch um den Aufhängepunkt. Dann wäre θ zyklisch.

10. Nach Noether wäre dann der Drehimpuls erhalten:

$$p_\theta = m(\ell + x)^2\dot{\theta} = \text{const..}$$

5 Perle auf rotierendem Stab

1. In Polarkoordinaten mit vorgegebenem Winkel ωt ist

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\omega^2.$$

2. Daher

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

3. In der horizontalen Ebene gibt es keine gravitative potentielle Energie, die von r abhängt. Wir setzen daher

$$V = 0.$$

4. Die reduzierte Lagrangefunktion ist

$$L(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

5. Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) = mr\omega^2,$$

also

$$\ddot{r} = \omega^2 r.$$

6. In der reduzierten Beschreibung ist L nicht explizit zeitabhängig, weil ω konstant ist.

7. Der zugehörige erhaltene Hamiltonsche Ausdruck ist

$$E_r = \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

8. Die mechanische Energie der Perle ist dagegen

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

Sie unterscheidet sich im Vorzeichen des zweiten Terms.

9. Der Stab muss durch einen äußeren Antrieb mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert werden. Dieser Antrieb kann Arbeit an der Perle verrichten. Deshalb ist die gewöhnliche kinetische Energie der Perle nicht erhalten.
10. Noether sagt hier: Zeittranslationssymmetrie der reduzierten Lagrangefunktion liefert die Erhaltung von E_r . Das ist nicht dasselbe wie Energieerhaltung eines abgeschlossenen mechanischen Systems, weil die vorgeschriebene Rotation durch äußere Arbeit aufrechterhalten wird.

6 Atwood-Maschine mit zwei generalisierten Koordinaten

1. Zwei Koordinaten genügen, weil die Seillänge konstant ist. Sind die Höhen zweier Massen bekannt, ist die Höhe der dritten Masse durch die Seillängenbedingung festgelegt.
2. Weder x noch y ist einzeln zyklisch, denn

$$L = \frac{m}{2}(5\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2) + C(2x - y)$$

hängt über $2x - y$ explizit von beiden Koordinaten ab.

3. Unter

$$x \mapsto x + \varepsilon, \quad y \mapsto y + 2\varepsilon$$

gilt

$$2x - y \mapsto 2(x + \varepsilon) - (y + 2\varepsilon) = 2x - y.$$

4. Da ε konstant ist, ändern sich die Geschwindigkeiten nicht:

$$\dot{x} \mapsto \dot{x}, \quad \dot{y} \mapsto \dot{y}.$$

Der kinetische Teil bleibt also ebenfalls unverändert.

5. Die kontinuierliche Symmetrie ist eine Verschiebung im Konfigurationsraum entlang des Vektors

$$(\delta x, \delta y) = (\varepsilon, 2\varepsilon).$$

6. Die kanonischen Impulse sind

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(5\dot{x} - \dot{y}), \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(-\dot{x} + 2\dot{y}).$$

Noether liefert

$$Q = p_x \cdot 1 + p_y \cdot 2 = m(5\dot{x} - \dot{y}) + 2m(-\dot{x} + 2\dot{y}).$$

Also

$$Q = 3m(\dot{x} + \dot{y}) = \text{const.}$$

7. Diese Größe ist eine Linearkombination generalisierter Impulse. Sie gehört zur Symmetrierichtung $(1, 2)$ im Koordinatenraum, nicht zur Bewegung einer einzelnen Masse.
8. Das Beispiel zeigt, dass Noether-Größen von der Symmetrie der Lagrangefunktion abhängen. Diese Symmetrie muss nicht direkt wie eine einfache räumliche Translation eines einzelnen Körpers aussehen.

7 Teilchen im rotationssymmetrischen Potential

1. In Polarkoordinaten gilt

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

2. Die Lagrangefunktion ist

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

3. Für r :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{dV}{dr}.$$

Also

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{dV}{dr}.$$

Für φ :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},$$

daher

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0.$$

4. Die zyklische Koordinate ist φ .

5. Daraus folgt

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$$

6. p_φ ist der Drehimpuls um den Ursprung:

$$\ell_z = mr^2\dot{\varphi}.$$

7. Setzt man $\ell_z = mr^2\dot{\varphi}$, so ist

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{\ell_z^2}{2mr^2}.$$

Damit wird die Radialbewegung durch

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

mit

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell_z^2}{2mr^2}$$

beschrieben.

8. Die Energie ist erhalten, weil L nicht explizit zeitabhängig ist:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r).$$

9. Drehimpulserhaltung folgt aus Rotationssymmetrie: $\varphi \mapsto \varphi + \varepsilon$.

10. Energieerhaltung folgt aus Zeittranslationssymmetrie: $t \mapsto t + \varepsilon$.

11. Noether formuliert beides einheitlich: Jede kontinuierliche Symmetrie der Wirkung liefert eine Erhaltungsgröße. Rotation liefert ℓ_z , Zeittranslation liefert E .

8 Rollender Zylinder in einer zylindrischen Schale

1. Ohne Gleiten müssen die zurückgelegten Bogenlängen übereinstimmen:

$$(R - r)\theta = r\phi.$$

Je nach Vorzeichenkonvention für ϕ kann ein Minuszeichen auftreten; für Energien zählt die quadrierte Beziehung

$$\dot{\phi} = \frac{R - r}{r} \dot{\theta}.$$

2. Der Mittelpunkt des kleinen Zylinders bewegt sich auf einem Kreis mit Radius $R - r$. Daher

$$v_C = (R - r)\dot{\theta}.$$

3. Die Translationsenergie ist

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}^2.$$

4. Mit $I = \frac{1}{2}mr^2$ ist

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{1}{4}mr^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2.$$

5. Wählt man den tiefsten Punkt als Nullniveau, so ist

$$V = mg(R - r)(1 - \cos \theta).$$

Äquivalent kann man $V = -mg(R - r)\cos \theta$ bis auf eine Konstante verwenden.

6. Die gesamte kinetische Energie ist

$$T = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2.$$

Mit dem Nullniveau am tiefsten Punkt:

$$L = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 - mg(R - r)(1 - \cos \theta).$$

7. Die Euler-Lagrange-Gleichung liefert

$$\frac{3}{2}m(R - r)^2\ddot{\theta} + mg(R - r)\sin \theta = 0.$$

Also

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R - r)}\sin \theta = 0.$$

8. Für kleine Auslenkungen $\sin \theta \simeq \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R - r)}\theta = 0.$$

9. Die Eigenfrequenz kleiner Schwingungen ist

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R - r)}}.$$

10. Die Energie ist erhalten:

$$E = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + mg(R - r)(1 - \cos \theta).$$

11. Der Drehimpuls um den Mittelpunkt der großen Schale ist nicht erhalten, weil das Schwerfeld ein äußeres Drehmoment bezüglich dieses Punktes liefert. Zusätzlich erzwingt die Schale durch Normalkräfte die Kreisbahn.

12. Vorhanden ist Zeittranslationssymmetrie, daher Energieerhaltung. Die Rotationssymmetrie um den Mittelpunkt der Schale wäre ohne Schwerfeld vorhanden, wird aber durch die ausgezeichnete vertikale Richtung des Schwerfeldes gebrochen.

9 Zwei gekoppelte Oszillatoren

1.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2.$$

2.

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2.$$

3.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2.$$

4. Euler-Lagrange ergibt

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -(k + \kappa)x_1 + \kappa x_2, \\ m\ddot{x}_2 &= \kappa x_1 - (k + \kappa)x_2. \end{aligned}$$

5. Mit

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ K &= \begin{pmatrix} k + \kappa & -\kappa \\ -\kappa & k + \kappa \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lautet die Matrixgleichung

$$M\ddot{\vec{x}} = -K\vec{x}.$$

6. Die Eigenwerte von $M^{-1}K$ sind

$$\frac{k}{m}, \quad \frac{k + 2\kappa}{m}.$$

Daher

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k + 2\kappa}{m}}.$$

7. Die zugehörigen Eigenmoden sind

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für gleichphasige Bewegung und

$$\vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für gegenphasige Bewegung.

8. Die Lagrangefunktion ist invariant unter Vertauschung

$$x_1 \leftrightarrow x_2.$$

Das ist eine diskrete Spiegelsymmetrie des Systems.

9. Nein. Das Noether-Theorem in dieser Form ordnet kontinuierlichen Symmetrien Erhaltungsgrößen zu. Eine reine diskrete Vertauschungssymmetrie liefert nicht direkt eine neue Erhaltungsgröße nach Noether.

10. Entfernt man die äußeren Federn, so hängt

$$V = \frac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2$$

nur noch vom Abstand ab. Dann ist das System invariant unter

$$x_1 \mapsto x_1 + a, \quad x_2 \mapsto x_2 + a.$$

11. Die erhaltene Größe ist der Gesamtimpuls:

$$P = m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = \text{const..}$$

10 Eindimensionales System mit effektiver Masse

1.

$$L = \frac{1}{2} M_{\text{eff}} \dot{q}^2 - V(q).$$

2.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M_{\text{eff}} \dot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{dV}{dq}.$$

Euler-Lagrange liefert

$$\frac{d}{dt}(M_{\text{eff}} \dot{q}) = -\frac{dV}{dq}.$$

3. Da M_{eff} konstant ist,

$$M_{\text{eff}} \ddot{q} = -\frac{dV}{dq}.$$

4. M_{eff} beschreibt die Trägheit des gesamten durch Zwangsbedingungen gekoppelten Systems in der Koordinate q . Sie muss daher nicht die Masse eines einzelnen Körpers sein.

5. Beispiel: Ein Körper, der ohne Gleiten rollt. Wählt man den Weg q des Schwerpunkts, dann ist

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{a^2} \right) \dot{q}^2,$$

also

$$M_{\text{eff}} = m + \frac{I}{a^2}.$$

6. Wenn V nicht explizit zeitabhängig ist, ist die Energie erhalten:

$$E = \frac{1}{2} M_{\text{eff}} \dot{q}^2 + V(q).$$

7. q ist im Allgemeinen nicht zyklisch, weil L über $V(q)$ explizit von q abhängt.

8. Damit q zyklisch ist, muss

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

gelten. Hier heißt das

$$\frac{dV}{dq} = 0,$$

also $V = \text{const.}$

9. Dann ist der kanonische Impuls erhalten:

$$p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = M_{\text{eff}} \dot{q} = \text{const.}$$

10. Zeittranslationssymmetrie bedeutet keine explizite Zeitabhängigkeit von L und führt zur Energieerhaltung. Translationssymmetrie in q -Richtung bedeutet keine explizite q -Abhängigkeit von L und führt zur Erhaltung von p_q .