

Lagrange-Mechanik und Noether-Theorem

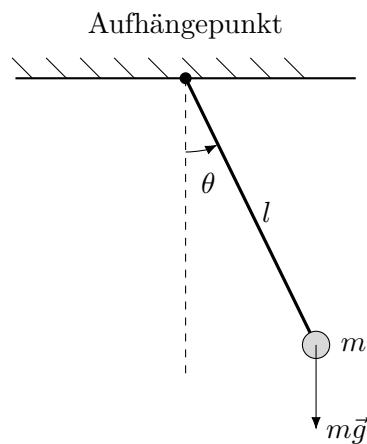
Dr. Thomas Sean Weatherby

Theo I – Lagrange-Aufgaben

1 Einfaches Pendel

Orientierung: based on MIT Lecture 16, Simple Pendulum.

Ein Fadenpendel der Länge l und Masse m schwingt in einer vertikalen Ebene. Die Masse des Fadens sei vernachlässigbar. Verwenden Sie den Winkel $\theta(t)$ gegen die nach unten zeigende Vertikale als generalisierte Koordinate.



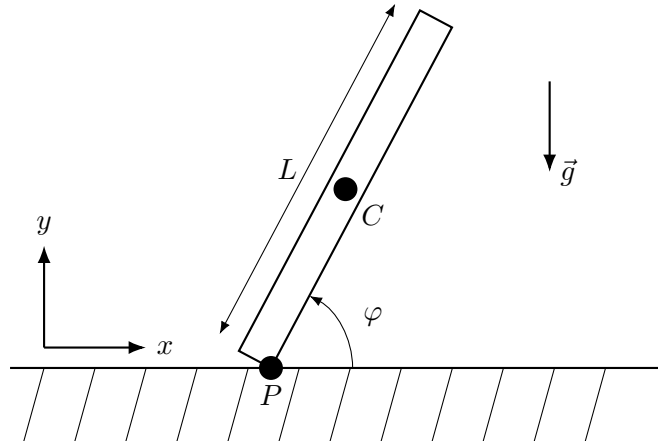
1. Geben Sie die Zwangsbedingung des Systems an.
2. Stellen Sie die kinetische Energie T auf.
3. Stellen Sie die potentielle Energie V auf. Wählen Sie das tiefste Niveau als Nullniveau.
4. Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$ auf.
5. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ her.
6. Zeigen Sie, dass sich für kleine Auslenkungen die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators ergibt.
7. Welche Erhaltungsgröße besitzt das System?
8. Warum ist θ keine zyklische Koordinate?
9. Erklären Sie mit Noethers Theorem, warum Energie erhalten ist, aber der Drehimpuls um den Aufhängepunkt im Allgemeinen nicht.

2 Fallender Stab auf glattem Boden

Orientierung: based on MIT Lecture 16, Falling Stick.

Ein homogener Stab der Länge L und Masse M fällt in einer vertikalen Ebene. Ein Ende des Stabes bleibt auf einem glatten horizontalen Boden und kann reibungsfrei gleiten. Der Stab verliert den Kontakt zum Boden nicht. Verwenden Sie als generalisierte Koordinaten die horizontale Koordinate des Schwerpunkts $x_C(t)$ und den Winkel $\varphi(t)$ des Stabes zur Horizontalen.

Das Trägheitsmoment um den Schwerpunkt sei $I_C = \frac{1}{12}ML^2$.

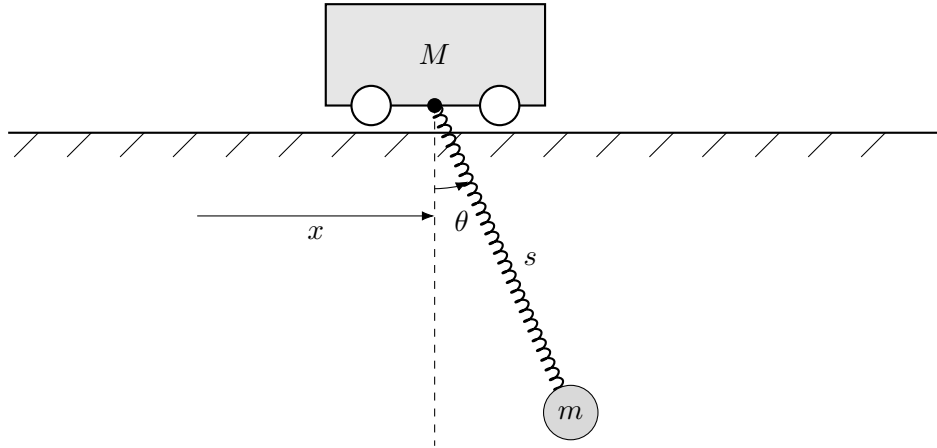


1. Geben Sie die Höhe des Schwerpunkts als Funktion von φ an.
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunkts.
3. Stellen Sie die kinetische Energie als Summe aus Translations- und Rotationsenergie auf.
4. Stellen Sie die potentielle Energie im Schwerfeld auf.
5. Stellen Sie die Lagrangefunktion $L = T - V$ auf.
6. Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für x_C her.
7. Welche Erhaltungsgröße folgt daraus?
8. Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für φ her.
9. Warum muss die Normalkraft des Bodens in der Lagrangefunktion nicht explizit vorkommen?
10. Interpretieren Sie die Erhaltung von p_{x_C} mit Noethers Theorem. Welche Symmetrie besitzt das System, welche Symmetrie besitzt es nicht?

3 Pendel mit beweglichem Aufhängepunkt und Feder

Orientierung: based on MIT Lecture 16, Cart with Pendulum and Spring.

Ein Wagen der Masse M kann sich reibungsfrei horizontal bewegen. An ihm ist ein Pendel befestigt. Die Pendelmasse sei m , der Abstand der Pendelmasse vom Aufhängepunkt sei $s(t)$, und zwischen Pendelmasse und Aufhängepunkt wirke eine Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge l . Der Winkel des Pendels zur Vertikalen sei $\theta(t)$. Die horizontale Position des Wagens sei $x(t)$.

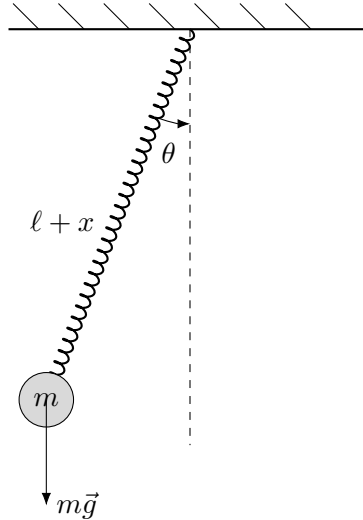


1. Geben Sie die kartesischen Koordinaten der Pendelmasse in Abhängigkeit von x, s, θ an.
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Pendelmasse.
3. Stellen Sie die kinetische Energie des Systems auf.
4. Stellen Sie die potentielle Energie aus Schwerkraft und Federenergie auf.
5. Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(x, s, \theta, \dot{x}, \dot{s}, \dot{\theta})$ auf.
6. Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für x her.
7. Welche Größe ist erhalten?
8. Warum ist x eine zyklische Koordinate?
9. Deuten Sie die Erhaltungsgröße als Gesamtimpuls in horizontaler Richtung.
10. Erklären Sie mit Noethers Theorem, warum horizontale Translationssymmetrie zu Impulserhaltung führt.

4 Federpendel in der Ebene

Orientierung: based on Morin, chap6.pdf, Spring Pendulum.

Ein Körper der Masse m hängt an einer Feder mit Federkonstante k . Die Ruhelänge der Feder sei ℓ . Die Bewegung findet in einer vertikalen Ebene statt. Die momentane Federlänge sei $\ell + x(t)$, und der Winkel zur Vertikalen sei $\theta(t)$.

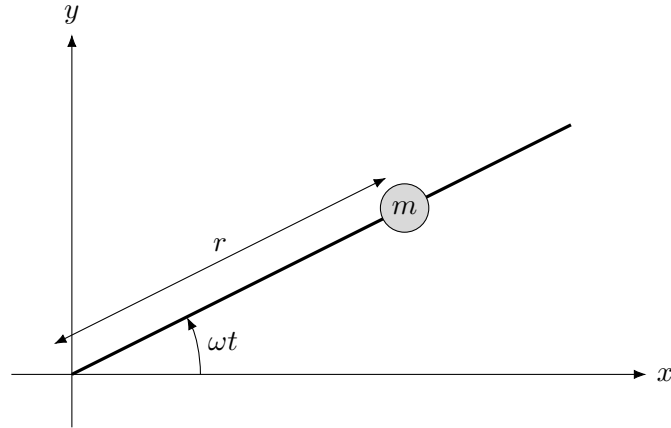


1. Stellen Sie die kinetische Energie auf. Zerlegen Sie sie in radialen und tangentialen Anteil.
2. Stellen Sie die potentielle Energie aus Federenergie und Lageenergie auf.
3. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
4. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ her.
5. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ her.
6. Identifizieren Sie in der radialen Gleichung den Term, der zur Zentripetal- bzw. Zentrifugalbeschreibung gehört.
7. Ist θ eine zyklische Koordinate? Begründen Sie.
8. Welche Erhaltungsgröße bleibt dennoch erhalten, solange keine Reibung auftritt?
9. Stellen Sie sich nun vor, es gäbe keine Schwerkraft. Welche zusätzliche Symmetrie hätte das System dann?
10. Welche Erhaltungsgröße würde nach Noethers Theorem im schwerelosen Fall folgen?

5 Perle auf rotierendem Stab

Orientierung: based on Morin, chap6.pdf, Bead on a stick.

Eine Perle der Masse m gleitet reibungsfrei auf einem geraden Stab. Der Stab rotiert in einer horizontalen Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ein festes Ende. Die Lage der Perle auf dem Stab wird durch den Abstand $r(t)$ vom Drehpunkt beschrieben.



1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Perle.
2. Stellen Sie die kinetische Energie auf.
3. Gibt es eine potentielle Energie? Begründen Sie.
4. Stellen Sie die Lagrangefunktion $L(r, \dot{r}, t)$ auf.
5. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für $r(t)$ her.
6. Ist die Lagrangefunktion explizit zeitabhängig?
7. Bestimmen Sie die erhaltene Größe, die aus der Zeitunabhängigkeit der Lagrangefunktion folgt.
8. Vergleichen Sie diese Größe mit der mechanischen Energie der Perle.
9. Warum ist diese erhaltene Größe nicht einfach die gewöhnliche mechanische Energie?
10. Formulieren Sie sorgfältig, was Noethers Theorem hier aussagt und was nicht.

6 Atwood-Maschine mit zwei generalisierten Koordinaten

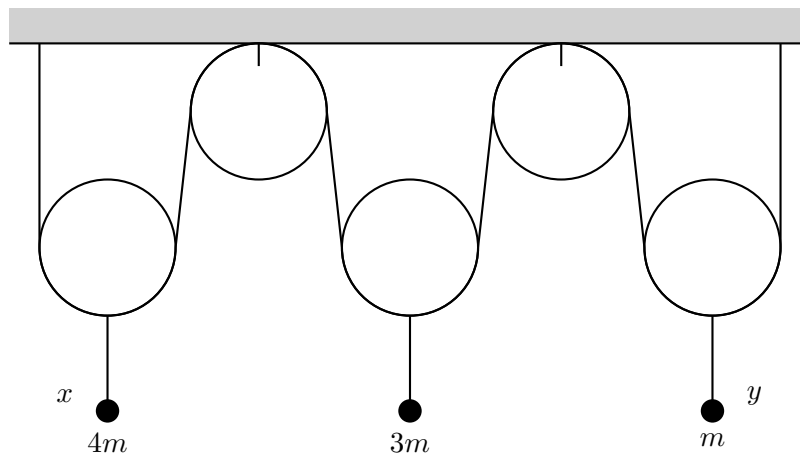
Orientierung: based on Morin, chap6.pdf, Atwood's machine and Noether example.

Betrachten Sie die unten gezeigte Atwood-Maschine mit masselosen Seilen und reibungsfreien Rollen. Die drei Massen sind $4m$, $3m$ und m . Die Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$ seien die Höhen der linken bzw. rechten äußeren Masse relativ zu ihrer Anfangslage. Durch die Seillängenbedingung ist die Höhe der mittleren Masse durch x und y festgelegt.

Für diese Wahl der Koordinaten kann die Lagrangefunktion in der Form

$$L = \frac{m}{2} (5\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y} + 2\dot{y}^2) + C(2x - y)$$

geschrieben werden, wobei C eine Konstante ist. Bestimmen Sie den erhaltenen Impuls, der aus der entsprechenden kontinuierlichen Symmetrie folgt.

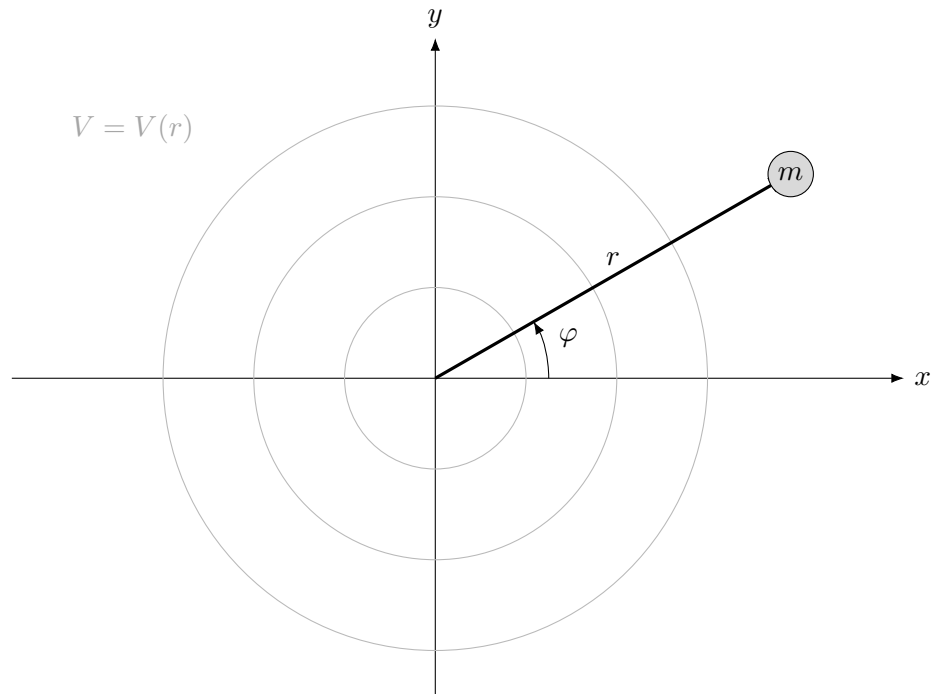


1. Erklären Sie, warum zwei Koordinaten x und y genügen, obwohl drei Massen vorhanden sind.
2. Prüfen Sie, ob x oder y einzeln zyklisch sind.
3. Zeigen Sie, dass die Kombination $2x - y$ unter der Transformation $x \rightarrow x + \varepsilon$, $y \rightarrow y + 2\varepsilon$ unverändert bleibt.
4. Zeigen Sie, dass auch die Geschwindigkeitsterme unter dieser Transformation unverändert bleiben.
5. Welche kontinuierliche Symmetrie besitzt die Lagrangefunktion?
6. Bestimmen Sie mit Noethers Theorem den zugehörigen erhaltenen Impuls.
7. Warum ist diese Erhaltungsgröße nicht einfach der Impuls einer einzelnen Masse?
8. Erklären Sie, warum dieses Beispiel zeigt, dass Noether-Erhaltungsgrößen nicht immer sofort anschaulich sind.

7 Teilchen im rotationssymmetrischen Potential

Orientierung: based on Morin, chap6.pdf, Noether theorem and rotational symmetry.

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in der Ebene in einem Potential $V(r)$, das nur vom Abstand r vom Ursprung abhängt. Verwenden Sie Polarkoordinaten (r, φ) .



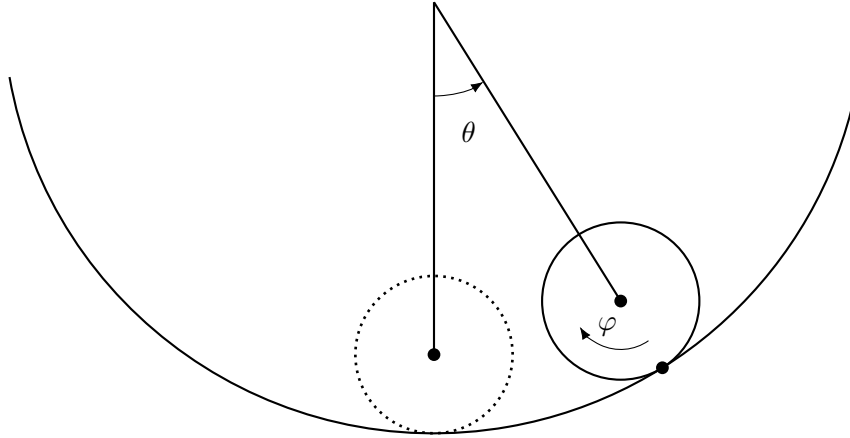
1. Stellen Sie die kinetische Energie auf.
2. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
3. Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für r und φ her.
4. Welche Koordinate ist zyklisch?
5. Welche Erhaltungsgröße folgt daraus?
6. Deuten Sie diese Größe als Drehimpuls.
7. Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung, um ein effektives Potential $V_{\text{eff}}(r)$ für die Radialbewegung zu formulieren.
8. Warum ist die Energie zusätzlich erhalten?
9. Welche Symmetrie führt zur Drehimpulserhaltung?
10. Welche Symmetrie führt zur Energieerhaltung?
11. Formulieren Sie beide Aussagen im Sinne von Noethers Theorem.

8 Rollender Zylinder in einer zylindrischen Schale

Orientierung: based on Dutta, lagrangian.pdf, rolling cylinder in cylinder example.

Ein homogener Vollzylinder der Masse m und des Radius r rollt ohne zu gleiten auf der Innenseite einer festen zylindrischen Schale mit Radius R . Die Bewegung findet in einer vertikalen Ebene statt. Der Winkel des Zylindermittelpunkts zur Vertikalen sei $\theta(t)$. Das Trägheitsmoment des Zylinders um seine Symmetrieachse sei

$$I = \frac{1}{2}mr^2.$$

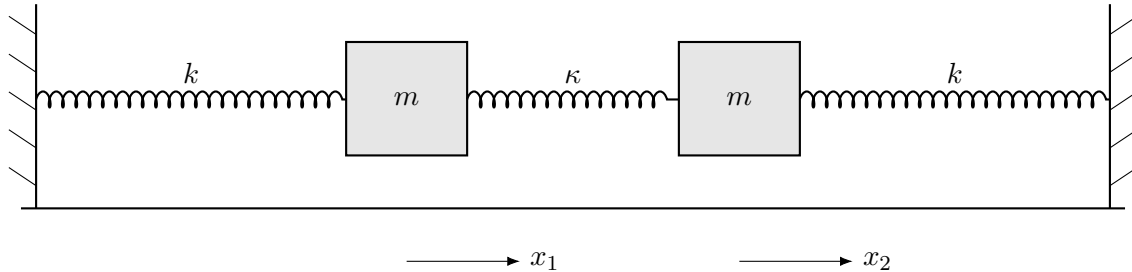


1. Geben Sie die Rollbedingung zwischen dem Winkel θ und dem Rotationswinkel ϕ des kleinen Zylinders an.
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Zylindermittelpunkts.
3. Stellen Sie die Translationsenergie auf.
4. Stellen Sie die Rotationsenergie auf.
5. Stellen Sie die potentielle Energie auf.
6. Verwenden Sie die Rollbedingung, um die Lagrangefunktion nur in der Koordinate θ zu schreiben.
7. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ her.
8. Linearisieren Sie die Gleichung für kleine Auslenkungen.
9. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz der kleinen Schwingungen.
10. Welche Erhaltungsgröße besitzt das System?
11. Warum gibt es trotz Rotation des Zylinders keine Erhaltung des Drehimpulses um den Mittelpunkt der großen Schale?
12. Erklären Sie mit Noethers Theorem, welche Symmetrie vorhanden ist und welche durch das Schwerfeld gebrochen wird.

9 Zwei gekoppelte Oszillatoren

Orientierung: based on Dutta, lagrangian.pdf, coupled oscillator/eigenfrequency section.

Zwei gleiche Massen m bewegen sich reibungsfrei auf einer horizontalen Schiene. Jede Masse ist mit einer äußeren Wand durch eine Feder der Federkonstante k verbunden. Zwischen den beiden Massen befindet sich eine Kopplungsfeder der Federkonstante κ . Die Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$.



1. Stellen Sie die kinetische Energie auf.
2. Stellen Sie die potentielle Energie auf.
3. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
4. Leiten Sie die gekoppelten Bewegungsgleichungen her.
5. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen in Matrixform

$$M\ddot{\vec{x}} = -K\vec{x}.$$

6. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.
7. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenmoden.
8. Welche Symmetrie erkennt man in der Vertauschung $x_1 \leftrightarrow x_2$?
9. Führt diese diskrete Symmetrie direkt zu einer Noether-Erhaltungsgröße? Begründen Sie.
10. Welche kontinuierliche Symmetrie besitzt das System, falls die äußeren Federn entfernt werden und nur die Kopplungsfeder zwischen den Massen bleibt?
11. Welche Erhaltungsgröße folgt dann nach Noethers Theorem?

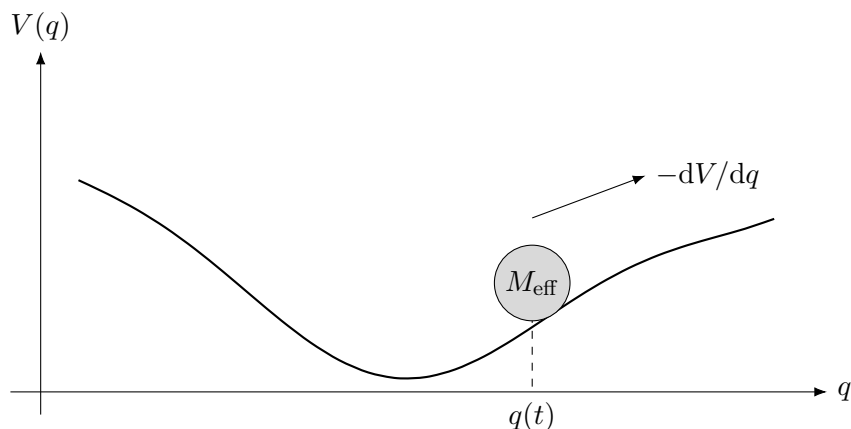
10 Eindimensionales System mit effektiver Masse

Orientierung: based on Dutta, lagrangian.pdf, effective mass theorem for one degree of freedom.

Ein mechanisches System besitzt nur einen Freiheitsgrad $q(t)$. Die kinetische Energie kann in der Form

$$T = \frac{1}{2} M_{\text{eff}} \dot{q}^2$$

geschrieben werden, wobei M_{eff} konstant ist. Die potentielle Energie sei $V(q)$.



1. Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.
2. Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung her.
3. Zeigen Sie, dass $M_{\text{eff}} \ddot{q} = -\frac{dV}{dq}$ gilt.
4. Erklären Sie, warum M_{eff} nicht unbedingt die Masse eines einzelnen Körpers sein muss.
5. Geben Sie ein Beispiel für ein System, bei dem eine effektive Masse durch Zwangsbedingungen entsteht.
6. Welche Erhaltungsgröße besitzt das System, wenn $V(q)$ nicht explizit zeitabhängig ist?
7. Warum ist q im Allgemeinen keine zyklische Koordinate?
8. Welche Bedingung müsste $V(q)$ erfüllen, damit q zyklisch wird?
9. Welche zusätzliche Erhaltungsgröße würde dann folgen?
10. Erklären Sie beide Fälle mit Noethers Theorem: Zeittranslationssymmetrie und Translationssymmetrie in q -Richtung.