GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Dr. Thomas Sean Weatherby

Theo I: 8. Lagrange-Formel

8. Juni 2026

1

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Wiederholung

Einstiegsaufabe:

1. **Zeichnen** Sie das Gravitationspotenzial, $U(r)$.
2. **Zeichnen** Sie zusätzlich den tangentialen kinetischen Energieterm
3. **Konstruieren** Sie daraus das effektive Potenzial, $U_{\text{eff}}\,(r)$.
4. **Warum** ist das effektive Potenzial wichtig?
5. **Erklären** Sie wie die Energien and Bewegungsformen zusammenhängen.

- Gibt es etwas aus den Vorlesungen, das Sie gerne diskutieren würden?

8. Juni 2026 Theo I: 8. Lagrange-Formel 2

2

Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonische Prinzip)

Wir beschreiben den Zustand unseres Systems durch verallgemeinerte Koordinaten:

$$q(t): (q_1(t), \ldots, q_N(t))$$

Die Wirkung wird folgendermaßen definiert:

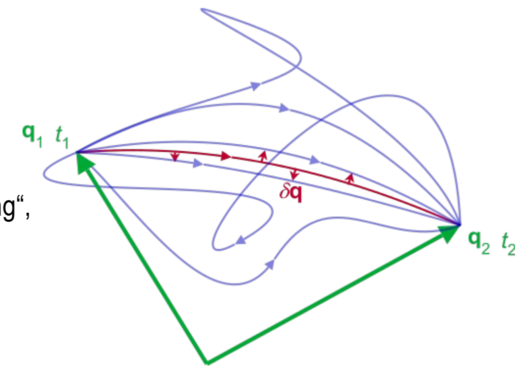
$$\mathcal{S}[q, t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt$$

Die Bezeichnung „Prinzip der kleinsten Wirkung“ ist irreführend. Korrekter ist, „Prinzip der stationären Wirkung“, denn:

$$\delta\mathcal{S} = 0$$

Oder:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = 0$$



3

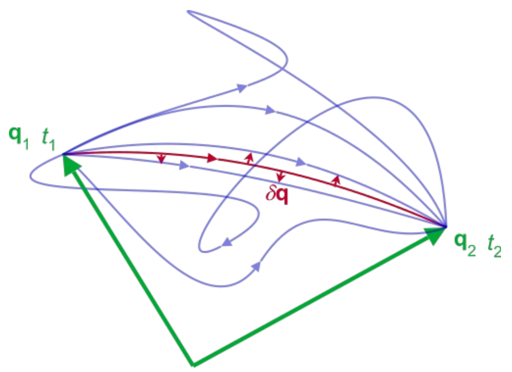
Prinzip der ~~kleinsten~~ stationären Wirkung (Hamiltonische Prinzip)

Einfach ausgedrückt:

Kleine Änderungen der Bahn ($q(t)$) führen zu keiner Änderung erster Ordnung in der Wirkung ($\mathcal{S}$).

Wichtig ist dabei:

Es handelt sich um eine Bahn im Konfigurationsraum mit verallgemeinerten Koordinaten, nicht unbedingt um eine Bewegung im dreidimensionalen „realen Raum“.



4

Euler-Lagrange-Gleichung

Für konservative mechanische Systeme gilt häufig:

$$L = T - V;$$

Mit T = Kinetische Energie (des Systems)
V = Potenzial (des Systems)

Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Dabei sind (q_i) verallgemeinerte Koordinaten, z. B. $x, y, z, r, \vartheta, \varphi.$

5

Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Nach dem **Noether-Theorem** gilt:

- Zeittranslationsinvarianz ⟶ Energieerhaltung
- Räumliche Translationsinvarianz / Homogenität des Raumes ⟶ Impulserhaltung
- Rotationsinvarianz / Isotropie des Raumes ⟶ Drehimpulserhaltung

6

Aufgabe 1

Betrachten Sie ein Fadenpendel der Länge (d), das im homogenen Schwerefeld in drei Raumrichtungen frei schwingen kann. Die Masse des Pendelkörpers sei (m), die Masse des Fadens sei vernachlässigbar.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten auf.
(b) Ermitteln Sie die Symmetrien des Systems und die entsprechenden Erhaltungsgrößen.
(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

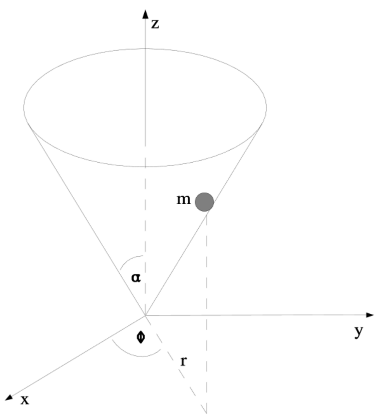
7

Aufgabe 2

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Eine Punktmasse m gleitet reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels unter dem Einfluss der Schwerkraft.
Der Kegel habe seine Spitze im Ursprung, seine Symmetrieachse sei die vertikale z-Achse, und der Halböffnungswinkel α sei gegen die z-Achse gemessen.

(a) Geben Sie explizit die Zwangsbedingungen an.
(b) Geben Sie die Lagrangefunktion an.
(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.



8

Aufgabe 3

Ein homogenes Seil der Länge L liegt zur Hälfte auf einem horizontalen Tisch; die andere Hälfte hängt über der Tischkante.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das Seil losgelassen und beginnt reibungsfrei hinunterzurutschen. Die lineare Massendichte sei μ.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion.
(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und integrieren Sie diese.