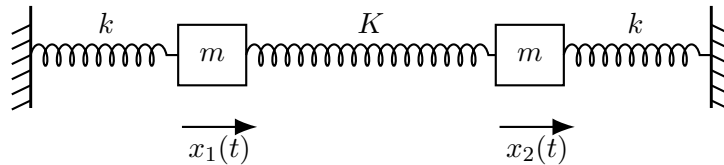


# Gekoppelte Schwingungen: Lösung

Normalmoden über ein Eigenwertproblem bestimmen

## Ausgangssystem

Zwei gleiche Massen  $m$  bewegen sich horizontal. Die äußeren Federn haben Federkonstante  $k$ , die Kopplungsfeder hat Federkonstante  $K$ .



## Lösung

### 1. Koordinaten und Vorzeichen festlegen

Wir messen beide Auslenkungen aus der jeweiligen Gleichgewichtslage. Die positive Richtung sei nach rechts.

- $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  sind Auslenkungen aus der jeweiligen Gleichgewichtslage.
- Positive Richtung: nach rechts.
- Kleine Auslenkungen: Die Federn bleiben im linearen Hooke-Bereich.

#### Kontrollfrage

Die Ruhelängen der Federn und konstante Vorspannungen spielen dann keine Rolle mehr. Für die Bewegung zählen nur die Änderungen relativ zur Gleichgewichtslage. Dadurch treten in den Bewegungsgleichungen nur die Auslenkungen  $x_1$  und  $x_2$  auf.

### 2. Federdehnungen in Abhängigkeit von $x_1$ und $x_2$ notieren

Mit positiver Richtung nach rechts gilt für die vorzeichenbehafteten Längenänderungen:

$$\Delta\ell_{\text{links}} = x_1, \quad \Delta\ell_{\text{Kopplung}} = x_2 - x_1, \quad \Delta\ell_{\text{rechts}} = -x_2.$$

Die rechte Feder wird also bei  $x_2 > 0$  gestaucht, daher ist ihre Längenänderung negativ.

### 3. Kräfte auf jede Masse aufstellen

Mit dem Hooke'schen Gesetz ergeben sich die folgenden Kraftbeiträge:

Feder	Kraft auf Masse 1	Kraft auf Masse 2
linke Feder	$-kx_1$	0
Kopplungsfeder	$K(x_2 - x_1)$	$-K(x_2 - x_1) = K(x_1 - x_2)$
rechte Feder	0	$-kx_2$
Summe	$F_1 = -(k + K)x_1 + Kx_2$	$F_2 = Kx_1 - (k + K)x_2$

#### 4. Newtonsche Bewegungsgleichungen formulieren

Für jede Masse gilt  $m\ddot{x} = F$ . Damit erhält man

$$m\ddot{x}_1 = -(k + K)x_1 + Kx_2, \quad m\ddot{x}_2 = Kx_1 - (k + K)x_2.$$

In Matrixform:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} k + K & -K \\ -K & k + K \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist

$$C = \begin{pmatrix} k + K & -K \\ -K & k + K \end{pmatrix}$$

die Federkonstantenmatrix. Sie ist symmetrisch, wie es für ein konservatives gekoppeltes Federsystem zu erwarten ist.

##### Vorzeichencheck

Für  $x_1 > 0$  und  $x_2 = 0$  gilt

$$F_1 = -(k + K)x_1 < 0.$$

Die Kraft auf Masse 1 zeigt also nach links, zurück zur Gleichgewichtslage. Das Vorzeichen ist damit plausibel.

#### 5. Normalmoden-Ansatz verwenden

Eine Normalmode bedeutet: Beide Massen schwingen mit derselben Kreisfrequenz; das Verhältnis ihrer Auslenkungen bleibt während der Bewegung konstant.

Wir setzen

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \vec{\phi} q(t), \quad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Für eine harmonische Schwingung setzen wir beispielsweise

$$q(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Dann gilt

$$\vec{\ddot{x}}(t) = \vec{\phi} \ddot{q}(t) = -\omega^2 \vec{\phi} q(t).$$

Einsetzen in

$$m\vec{\ddot{x}} = -C\vec{x}$$

liefert

$$-m\omega^2 \vec{\phi} q(t) = -C\vec{\phi} q(t).$$

Für  $q(t) \neq 0$  kann der gemeinsame Zeitfaktor gekürzt werden:

$$C\vec{\phi} = m\omega^2 \vec{\phi}.$$

Dies ist ein Eigenwertproblem der Form

$$C\vec{\phi} = \mu\vec{\phi}, \quad \text{mit} \quad \mu = m\omega^2.$$

## 6. Charakteristische Gleichung aufstellen

Nichttriviale Normalmoden haben  $\vec{\phi} \neq \vec{0}$ . Daher muss gelten:

$$\det(C - \mu I) = 0.$$

Mit

$$C = \begin{pmatrix} k + K & -K \\ -K & k + K \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} k + K - \mu & -K \\ -K & k + K - \mu \end{pmatrix} = 0.$$

Also

$$(k + K - \mu)^2 - K^2 = 0.$$

Damit

$$(k + K - \mu - K)(k + K - \mu + K) = 0,$$

also

$$(k - \mu)(k + 2K - \mu) = 0.$$

Die beiden Eigenwerte sind daher

$$\mu_1 = k, \quad \mu_2 = k + 2K.$$

Die Kreisfrequenzen ergeben sich aus  $\mu_i = m\omega_i^2$ :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}.$$

## 7. Eigenvektoren bestimmen

Für jede gefundene Lösung  $\mu_i$  lösen wir

$$(C - \mu_i I)\vec{\phi}^{(i)} = \vec{0}.$$

**Erste Mode:**  $\mu_1 = k$

$$C - kI = \begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix}.$$

Damit

$$\begin{pmatrix} K & -K \\ -K & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$K\phi_1 - K\phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \phi_2.$$

Eine mögliche Wahl ist daher

$$\vec{\phi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Zweite Mode:**  $\mu_2 = k + 2K$

$$C - (k + 2K)I = \begin{pmatrix} -K & -K \\ -K & -K \end{pmatrix}.$$

Damit

$$\begin{pmatrix} -K & -K \\ -K & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$-K\phi_1 - K\phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = -\phi_2.$$

Eine mögliche Wahl ist daher

$$\vec{\phi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

#### Interpretation der Eigenvektoren

Die erste Mode

$$\vec{\phi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine gleichsinnige Bewegung. Beide Massen bewegen sich immer in dieselbe Richtung. Die Kopplungsfeder wird dabei nicht gedehnt oder gestaucht.

Die zweite Mode

$$\vec{\phi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine gegensinnige Bewegung. Die Massen bewegen sich immer in entgegengesetzte Richtungen. Die Kopplungsfeder wird dabei besonders stark gedehnt oder gestaucht.

## 8. Allgemeine Bewegung als Überlagerung der Normalmoden schreiben

Die allgemeine Bewegung ist eine Linearkombination der beiden Normalmoden:

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

mit

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}.$$

Komponentenweise bedeutet das:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Alternativ kann man die allgemeine Lösung mit Sinus- und Kosinusanteilen schreiben:

$$\vec{x}(t) = a_1 \vec{\phi}^{(1)} \cos(\omega_1 t) + b_1 \vec{\phi}^{(1)} \sin(\omega_1 t) + a_2 \vec{\phi}^{(2)} \cos(\omega_2 t) + b_2 \vec{\phi}^{(2)} \sin(\omega_2 t).$$

Mit den konkreten Eigenvektoren:

$$\vec{x}(t) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t) + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t) + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t).$$

### Endergebnis

Die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{x}(t) = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t) + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t) + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t),$$

mit

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}.$$

Die Konstanten  $a_1, b_1, a_2, b_2$  werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt.

### Spezialfall: alle Federkonstanten gleich

Falls auch die Kopplungsfeder dieselbe Federkonstante besitzt, gilt

$$K = k.$$

Dann werden die Frequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

Die Eigenvektoren bleiben gleich:

$$\vec{\phi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$