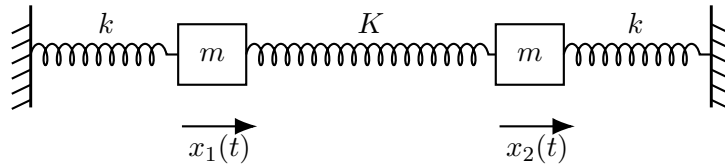


Gekoppelte Schwingungen: Schritt-für-Schritt-Leitfaden

Normalmoden über ein Eigenwertproblem bestimmen

Ausgangssystem

Zwei gleiche Massen m bewegen sich horizontal. Die äußeren Federn haben Federkonstante k , die Kopplungsfeder hat Federkonstante K .



Leitfaden

1. Koordinaten und Vorzeichen festlegen

Legen Sie zuerst eindeutig fest:

- $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sind Auslenkungen aus der jeweiligen Gleichgewichtslage.
- Positive Richtung: _____.
- Kleine Auslenkungen: Die Federn bleiben im linearen Hooke-Bereich.

Kontrollfrage

Warum ist es hier sinnvoll, die Auslenkungen relativ zur Gleichgewichtslage zu messen, statt relativ zu einer festen Wand?

2. Federdehnungen in Abhängigkeit von x_1 und x_2 notieren

Bestimmen Sie, wie stark jede Feder gegenüber der Gleichgewichtslage gedehnt oder gestaucht wird. Achten Sie auf die Vorzeichen.

$$\Delta\ell_{\text{links}} = \text{_____}, \quad \Delta\ell_{\text{Kopplung}} = \text{_____}, \quad \Delta\ell_{\text{rechts}} = \text{_____}.$$

Hinweis

Die Kopplungsfeder hängt nicht von x_1 oder x_2 einzeln ab, sondern von der *relativen Auslenkung* der beiden Massen.

3. Kräfte auf jede Masse aufstellen

Verwenden Sie das Hooke'sche Gesetz für jede Feder. Tragen Sie die Kraftbeiträge in die Tabelle ein.

Feder	Kraft auf Masse 1	Kraft auf Masse 2
linke Feder	_____	_____
Kopplungsfeder	_____	_____
rechte Feder	_____	_____
Summe	$F_1 = \text{_____}$	$F_2 = \text{_____}$

4. Newtonsche Bewegungsgleichungen formulieren

Setzen Sie für jede Masse $m\ddot{x} = F$ an:

$$m\ddot{x}_1 = \underline{\hspace{10cm}}, \quad m\ddot{x}_2 = \underline{\hspace{10cm}}.$$

Bringen Sie das Gleichungssystem anschließend in Matrixform:

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{pmatrix}}_C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist C die *Federkonstantenmatrix*. Sie sollte symmetrisch sein.

Vorzeichencheck

Wenn $x_1 > 0$ und $x_2 = 0$ ist: Zeigt die resultierende Kraft auf Masse 1 zurück zur Gleichgewichtslage? Prüfen Sie Ihr Vorzeichen.

5. Normalmoden-Ansatz verwenden

Eine Normalmode bedeutet: Beide Massen schwingen mit derselben Kreisfrequenz; nur die Amplituden und Vorzeichen können verschieden sein. Schreiben Sie daher

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \vec{\phi} q(t), \quad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Für harmonische Schwingungen können Sie z. B. setzen:

$$q(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Setzen Sie diesen Ansatz in

$$m\ddot{\vec{x}} = -C\vec{x}$$

ein und kürzen Sie den gemeinsamen Zeitfaktor. Sie erhalten ein Eigenwertproblem der Form

$$C\vec{\phi} = \mu\vec{\phi}, \quad \text{mit} \quad \mu = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6. Charakteristische Gleichung aufstellen

Nichttriviale Normalmoden haben $\vec{\phi} \neq \vec{0}$. Daher muss gelten:

$$\det(C - \mu I) = 0.$$

Schreiben Sie die Determinante explizit hin:

$$\det \begin{pmatrix} \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \underline{\hspace{2cm}} \end{pmatrix} = 0.$$

Lösen Sie diese Gleichung nach μ . Bezeichnen Sie die beiden Lösungen mit

$$\mu_1 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \mu_2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Die Kreisfrequenzen ergeben sich anschließend aus

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{m}}, \quad i = 1, 2.$$

7. Eigenvektoren bestimmen

Für jede gefundene Lösung μ_i lösen Sie

$$(C - \mu_i I)\vec{\phi}^{(i)} = \vec{0}.$$

$$\vec{\phi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{pmatrix}.$$

Interpretation der Eigenvektoren

Beschreiben Sie für jede Mode in Worten.

8. Allgemeine Bewegung als Überlagerung der Normalmoden schreiben

Wenn Sie beide Normalmoden kennen, schreiben Sie die allgemeine Bewegung als Linearkombination:

$$\vec{x}(t) = A_1 \vec{\phi}^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \vec{\phi}^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Alternativ können Sie für Anfangsbedingungen oft bequemer schreiben:

$$\vec{x}(t) = a_1 \vec{\phi}^{(1)} \cos(\omega_1 t) + b_1 \vec{\phi}^{(1)} \sin(\omega_1 t) + a_2 \vec{\phi}^{(2)} \cos(\omega_2 t) + b_2 \vec{\phi}^{(2)} \sin(\omega_2 t).$$

Prüfliste am Ende

1. Haben alle Terme in der Bewegungsgleichung die Einheit einer Kraft?
2. Hat ω^2 die Einheit $1/s^2$?
3. Ist die Federkonstantenmatrix symmetrisch?
4. Sind die Eigenvektoren linear unabhängig?
5. Ergibt der Grenzfall $K \rightarrow 0$ physikalisch Sinn?
6. Ergibt der Spezialfall $K = k$ physikalisch Sinn?
7. Können Sie beide Normalmoden in einem Satz physikalisch beschreiben?