

Dr. Thomas Sean Weatherby

Theo I: 7. Gekoppelte Schwingungen

Woche 7

2. Juni 2026

1

Wiederholung vom letzten Mal

Einstiegsaufgabe:

1. **Schreiben** Sie die drei Kepler Gesetze auf.
2. **Skizzieren** Sie qualitativ das effektive Potential $U_{\text{eff}}(r)$ für ein Teilchen im Gravitationspotential mit $L \neq 0$.

Erklären Sie daneben kurz:

- Welche zwei Beiträge werden addiert?
 - Was passiert für sehr kleine r ?
 - Was passiert für sehr große r ?
 - Was kann man aus einer Energielinie E über die erlaubte Bewegung und die Umkehrpunkte ablesen?
- Gibt es etwas aus den Vorlesungen, das Sie gerne diskutieren würden?

2. Juni 2026

Theo I: 7. Gekoppelte Schwingungen

2

2

Gekoppelte Schwingungen: Warum wird das schwierig?

Bei einem einzelnen harmonischen Oszillator ist die Bewegung durch eine Auslenkung ($\vec{x}(t)$) beschrieben.

Bei gekoppelten Schwingungen gibt es mehrere Auslenkungen gleichzeitig:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Die Bewegung von Masse 1 beeinflusst Masse 2 – und umgekehrt.

Deshalb erhalten wir nicht eine einzelne Bewegungsgleichung, sondern ein gekoppeltes Gleichungssystem.

Die zentrale Idee: Normalmoden

Manche Bewegungen eines gekoppelten Systems sind besonders einfach.

In einer Normalmode schwingen alle Teile des Systems mit derselben Frequenz. Nur die relativen Auslenkungen unterscheiden sich.

Wir schreiben daher:

$$\vec{x}(t) = \vec{\phi} \cdot q(t)$$

Dabei beschreibt $\vec{\phi}$ die Form der Bewegung, und $q(t)$ die zeitliche Schwingung.

Die Frage ist also nicht zuerst: „Wie bewegt sich jede Masse einzeln?“
Sondern: Welche Bewegungsformen sind dem System „natürlich“?

Vom Federsystem zum Eigenwertproblem

Für das gekoppelte Federsystem erhalten wir eine Bewegungsgleichung der Form

$$m \vec{\ddot{x}}(t) = -\underline{C} \cdot \vec{x}(t)$$

Die Matrix (\underline{C}) enthält die Rückstellkräfte und Kopplungen des Systems.

Für eine harmonische Normalmode setzen wir $\vec{x}(t) = \vec{\phi} \cos(\omega t + \varphi)$

Dann wird aus der Differentialgleichung ein Eigenwertproblem: $\underline{C} \vec{\phi} = m\omega^2 \vec{\phi}$.

Die Mathematik fragt: Welche Vektoren behalten unter der Wirkung von \underline{C} ihre Richtung?

Die Physik fragt: Welche Bewegungsformen schwingen als stabile Grundbewegungen?

Blick voraus: Quantenmechanik

Eigenwertprobleme sind nicht nur ein Rechenrick für Federn.

Sie sind eine zentrale Sprache der Physik.

In der Quantenmechanik begegnet uns eine sehr ähnliche Struktur: $\hat{H}\psi = E\psi$.

Dabei ist \hat{H} der Hamilton-Operator, ψ ein Zustand und E ein möglicher Energiewert.

Heute: $\underline{C} \vec{\phi} = m\omega^2 \vec{\phi}$ liefert Normalmoden und Frequenzen.

Später: $\hat{H}\psi = E\psi$ liefert Energiezustände und mögliche Messwerte.

Gemeinsame Idee: Besondere Zustände machen das physikalische System einfach.

Was das Arbeitsblatt leisten soll

Das Arbeitsblatt führt Sie durch den Übergang

mechanisches System \rightarrow Matrixgleichung \rightarrow Eigenwertproblem \rightarrow physikalische Interpretation

1. Bearbeiten Sie das Arbeitsblatt zu Gekoppelte Schwingung.