Effektives Potential und Umkehrpunkte

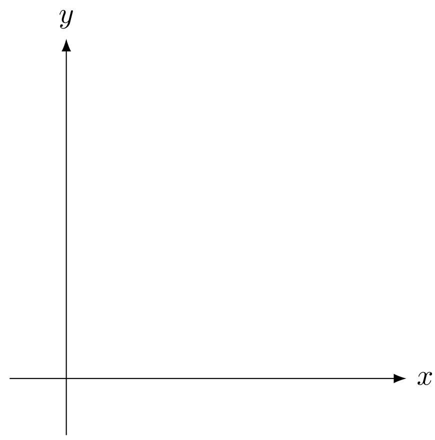
Thomas Sean Weatherby

Theo I – Woche 6

1 Radial- und Winkelbewegung trennen

Bei einer Zentralkraft bleibt die Bewegung in einer Ebene. Wir beschreiben den Ort daher mit Polarkoordinaten r und φ.

1. Skizzieren Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ und Koordinate φ zu einem Massenpunkt in der Ebene.
2. Markieren Sie die radiale Richtung $\vec{e}_r$ und die tangentiale Richtung $\vec{e}_\varphi$.
3. Ergänzen Sie in der Skizze eine Bewegung, die sowohl eine radiale als auch eine tangentiale Komponente besitzt.
4. Erklären Sie anschaulich:
   (a) Was bedeutet $\dot{r}$?
   (b) Was bedeutet $r\dot{\varphi}$?



5. Schreiben Sie die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}mv^2$ mit diesen zwei Beiträgen:

$$T = \underline{\hspace{4cm}} + \underline{\hspace{4cm}}.$$

2 Energiegleichung: ein Problem erkennen

Die Gesamtenergie ist erhalten:

$$E = T + U(r).$$

Schauen Sie sich Ihren Ausdruck für die kinetische Energie aus dem letzten Abschnitt an.

Das ist zunächst etwas merkwürdig: Das Potential $U(r)$ hängt nur vom Abstand r ab. Trotzdem hängt die Energiegleichung auch von $\dot{\varphi}$ ab, also davon, wie schnell sich das Teilchen um das Zentrum bewegt.

1. Erklären Sie in Worten: Warum können r und $\dot{\varphi}$ bei einer Bewegung im Zentralpotential nicht unabhängig voneinander sein?

   ____

   ____

2. Stellen Sie sich vor, das Teilchen kommt dem Zentrum näher (r wird kleiner). Was erwarten Sie für $\dot{\varphi}$?

   ☐ $\dot{\varphi}$ wird größer ☐ $\dot{\varphi}$ bleibt gleich ☐ $\dot{\varphi}$ wird kleiner

   Begründen Sie kurz:

   ____

3. Welche Erhaltungsgröße beschreibt genau diesen Zusammenhang zwischen Abstand und Umlaufbewegung?

   ____

3 Drehimpuls einsetzen

Bei einem Zentralpotential wirkt die Kraft immer entlang von $\vec{r}$. Deshalb ist das Drehmoment null und der Drehimpuls erhalten.

1. Schreiben Sie den Betrag des Drehimpulses in Polarkoordinaten:

   $$L = mr^2\dot{\varphi}.$$

   Lösen Sie nach $\dot{\varphi}$ auf:

   $$\dot{\varphi} = \underline{\hspace{6cm}}.$$

2. Setzen Sie diesen Ausdruck in den tangentialen Energiebeitrag ein:

   $$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}mr^2\left(\underline{\hspace{3cm}}\right)^2 = \underline{\hspace{5cm}}.$$

3. Setzen Sie das Ergebnis in die Energiegleichung ein:

   $$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) + \underline{\hspace{5cm}}.$$

4. Alles, was nur von r abhängt und nicht von $\dot{r}$, fassen wir zum effektiven Potential zusammen:

   $$U_{\text{eff}}(r) = \underline{\hspace{10cm}}.$$

4 Radialgeschwindigkeit aus dem effektiven Potential

Aus

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

1. Warum muss $E - U_{\text{eff}}(r) \geq 0$ immer gelten?
2. An welchen Stellen ist $\dot{r} = 0$?

   $$E = \underline{\hspace{6cm}}.$$

3. Warum heißen diese Stellen *Umkehrpunkte* der radialen Bewegung?

   ____

   ____

4. Wichtig: Ist am Umkehrpunkt die gesamte Geschwindigkeit v null?

   ____

   ____

5 Die Form von $U_{\text{eff}}(r)$ im Gravitationsfall

Für das Gravitationspotential gilt:

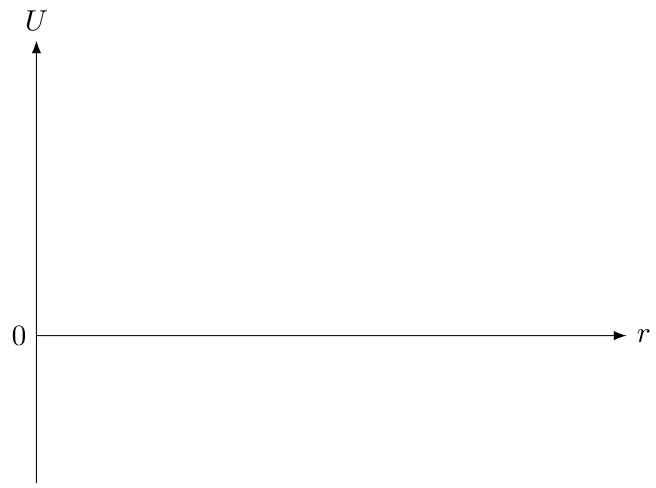
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

1. Betrachten Sie zuerst kleine Abstände $r \to 0$.
   (a) Was passiert mit $-\frac{\alpha}{r}$? ____________________
   (b) Was passiert mit $\frac{L^2}{2mr^2}$? ____________________
   (c) Welcher Term wächst schneller im Betrag: $\frac{1}{r}$ oder $\frac{1}{r^2}$? ____________________
   (d) Was folgt für $U_{\text{eff}}(r)$ bei sehr kleinen r? ____________________
2. Betrachten Sie nun große Abstände $r \to \infty$.
   (a) Was passiert mit beiden Termen? ____________________
   (b) Von welcher Seite nähert sich $U(r)$ dem Wert 0: von oben oder von unten? ____________________
   (c) Was erwarten Sie daher für $U_{\text{eff}}(r)$ bei großen r? ____________________
3. Erklären Sie mit diesen Grenzfällen, warum die Skizze links eine steile Wand und in der Mitte einen Topf besitzt.

6 Skizze konstruieren

Konstruieren Sie nun qualitativ die Skizze für ein Gravitationspotential mit $L \neq 0$.

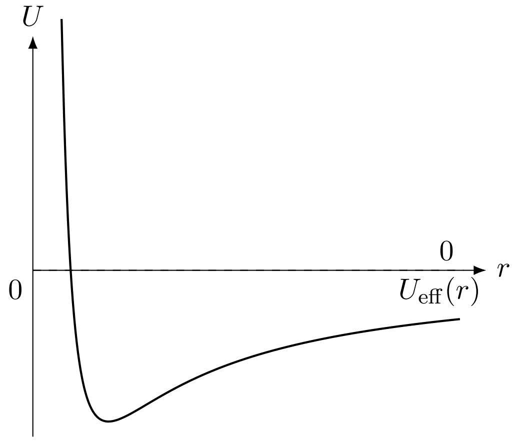
1. Zeichnen Sie zuerst das Gravitationspotential $U(r) = -\alpha/r$ dünn ein.
2. Zeichnen Sie dann den positiven Term $\frac{L^2}{2mr^2}$ dünn ein.
3. Addieren Sie beide Beiträge qualitativ zu $U_{\text{eff}}(r)$.
4. Beschriften Sie in Ihrer Skizze:
   (a) Minimum des effektiven Potentials,
   (b) Grenzwert $U_{\text{eff}}(r) \to 0$ für $r \to \infty$.



7 Energielinien und erlaubte Bereiche

In der folgenden Skizze ist eine typische Form von $U_{\text{eff}}(r)$ bereits eingezeichnet. Ergänzen Sie passende Energielinien.

1. Zeichnen Sie eine Energie E_1 mit
$$U_{\text{eff,min}} < E_1 < 0.$$
Markieren Sie die zwei Umkehrpunkte r_{min} und r_{max}.
2. Zeichnen Sie eine Energie $E_2 > 0$. Markieren Sie den einzigen endlichen Umkehrpunkt.
3. Klammern Sie jeweils die Bereiche ein, in denen die radiale Bewegung erlaubt ist.
4. Formulieren Sie die Regel: Bewegung ist nur dort möglich, wo ________________ gilt.



Energielinien ergänzen

8 Gebundene und ungebundene Bahn

Nutzen Sie Ihre Skizze und die Bedingung $E \geq U_{\text{eff}}(r)$.

1. Warum führt eine Energie $U_{\text{eff,min}} < E < 0$ zu einer gebundenen Bahn?
2. Warum kann das Teilchen bei $E \geq 0$ beliebig große Abstände erreichen?
3. Verbinden Sie diese Energiebetrachtung mit den Bahnformen im Keplerproblem:
   (a) $E < 0$: ________________
   (b) $E = 0$: ________________
   (c) $E > 0$: ________________
4. Erklären Sie in einem Satz: Warum ist eine „ungebundene Bahn“ nicht dasselbe wie eine Bahn ohne Wechselwirkung?

____

____