

Kepler II – Lösungen

Thomas Sean Weatherby

Theo I – Woche 5

1 Ziel der Herleitung

Gesucht ist eine Herleitung des zweiten Kepler'schen Gesetzes. Die zentrale Idee ist:

$$\text{Zentralkraft} \implies \vec{M} = \vec{0} \implies \vec{L} = \text{konstant} \implies \frac{dA}{dt} = \text{konstant}.$$

2 Kleine überstrichene Fläche

Für ein kleines Zeitintervall dt kann das Bahnstück lokal durch eine kurze Gerade angenähert werden.

1. Der erste Ortsvektor zeigt vom Zentralgestirn zum Planeten. Der zweite Ortsvektor zeigt zum sehr nahe benachbarten Punkt auf der Bahn. Die Differenz der beiden Vektoren ist näherungsweise das kleine Bahnstück.
2. Für sehr kleine Winkel ist der gekrümmte Bahnbogen näherungsweise gerade. Die überstrichene Fläche ist dann näherungsweise ein Dreieck mit Spitze im Zentralgestirn.
3. Eine Seite des Dreiecks ist näherungsweise der Ortsvektor mit Länge r . Die zur Richtung von $\vec{r}$ senkrechte Komponente der Verschiebung ist für einen kleinen Winkel $d\theta$ näherungsweise $r d\theta$. Ein möglicher radialer Anteil der Verschiebung trägt zur Dreiecksfläche nicht bei.
4. Damit gilt

$$dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

3 Flächengeschwindigkeit und Drehimpuls

Die Kreuzproduktform ist dieselbe Aussage wie die Dreiecksformel aus Abschnitt 2. In Polarkoordinaten gilt für eine kleine Verschiebung

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta.$$

Mit $\vec{r} = r \vec{e}_r$ folgt

$$\vec{r} \times d\vec{r} = r \vec{e}_r \times (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) = r^2 d\theta (\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta),$$

weil $\vec{e}_r \times \vec{e}_r = \vec{0}$. Der radiale Anteil $dr \vec{e}_r$ erzeugt also keine Fläche.

1. Der Betrag des Kreuzprodukts ist

$$|\vec{r} \times d\vec{r}| = |\vec{r}| |d\vec{r}| \sin \alpha.$$

Das ist Grundseite mal Höhe und damit die Fläche des von $\vec{r}$ und $d\vec{r}$ aufgespannten Parallelogramms.

2. Die überstrichene kleine Fläche ist nicht das ganze Parallelogramm, sondern das zugehörige Dreieck. Deshalb kommt der Faktor $\frac{1}{2}$ hinzu:

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|.$$

3. Mit $d\vec{r} = \vec{v} dt$ folgt

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt.$$

Division durch dt liefert

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|.$$

4. Aus

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

folgt

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{|\vec{L}|}{m}.$$

Also

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m}.$$

5. Wenn $\vec{L}$ erhalten ist, ist auch $|\vec{L}|$ konstant. Für konstante Masse m ist daher

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{konstant}.$$

6. Die Bahn liegt in einer festen Ebene senkrecht zu $\vec{L}$. Außerdem ist $\frac{dA}{dt}$ konstant, also wird in gleichen Zeitintervallen jeweils die gleiche Fläche überstrichen.

4 Flächensatz

1. Bei einer Zentralkraft ist $\vec{F}$ parallel oder antiparallel zu $\vec{r}$, also $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$. Daher gilt

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}.$$

Mit $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ folgt

$$\dot{\vec{L}} = \vec{0},$$

also ist $\vec{L}$ konstant.

2. Der Vektor $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$ steht senkrecht auf $\vec{r}$ und auf $\vec{v}$. Wenn $\vec{L}$ als Vektor konstant ist, dann liegt $\vec{r}$ zu jedem Zeitpunkt in derselben Ebene senkrecht zu $\vec{L}$ durch das Zentralgestirn. Daher bleibt die Bahnebene fest.

3. Der Flächensatz lautet: Der Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Das ist das zweite Kepler'sche Gesetz.

5 Ellipsenfläche und Umlaufzeit

1. Bei konstanter Flächengeschwindigkeit gilt für einen vollständigen Umlauf:

$$\text{gesamte Fläche} = \text{Flächengeschwindigkeit} \cdot T.$$

2. Für die Ellipse ist $A_{\text{Ellipse}} = \pi ab$. Also

$$T \cdot \frac{dA}{dt} = \pi ab.$$

Aufgelöst nach der Flächengeschwindigkeit:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T}.$$

3. In

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

ist bei einer elliptischen Bahn sowohl r als auch $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ im Allgemeinen nicht konstant. Das Produkt $r^2 \dot{\theta}$ bleibt aber konstant.

6 Mittlere Bewegung n

1. Aus

$$n = \frac{2\pi}{T}$$

folgt

$$\frac{\pi}{T} = \frac{n}{2}.$$

2. Damit wird

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = ab \frac{\pi}{T} = \frac{abn}{2}.$$

3. n ist eine mittlere Winkelgeschwindigkeit über den ganzen Umlauf. Die momentane Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ kann sich entlang der elliptischen Bahn ändern. In Sonnennähe ist sie größer, in Sonnenferne kleiner.

7 Die Zielgleichung in Ellipsenparametern

1. Gleichsetzen liefert

$$\frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{abn}{2}.$$

2. Multiplikation mit 2 ergibt

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = abn.$$

3. Multiplikation mit dt liefert

$$r^2 d\theta = abn dt.$$

4. Für festes dt und konstante rechte Seite muss $d\theta$ größer werden, wenn r kleiner wird. Der Planet bewegt sich also nahe am Zentralgestirn mit größerer Winkelgeschwindigkeit.