Kepler II

Thomas Sean Weatherby

Theo I – Woche 5

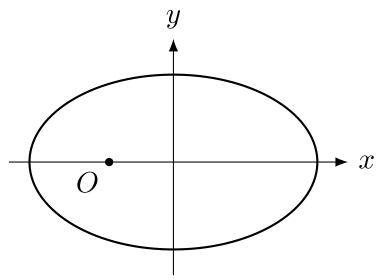
1 Ziel der Herleitung

Ein Planet bewege sich auf einer elliptischen Bahn mit großer Halbachse a, kleiner Halbachse b und Umlaufzeit T. Der Ortsvektor vom Zentralgestirn zum Planeten sei $\vec{r}$. Der Winkel in der Bahnebene sei θ.

In dieser Aufgabe leiten Sie selbst das zweite Kepler'sche Gesetz her.

2 Kleine überstrichene Fläche

Betrachten Sie ein kleines Zeitintervall dt, in dem sich der Planet um den kleinen Winkel $d\theta$ weiterbewegt.



1. Skizzieren Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ und $\vec{r} + \delta\vec{r}$ zu zwei sehr nahe beieinanderliegenden Zeitpunkten.
2. Erklären Sie, warum die in dieser kleinen Zeit überstrichene Fläche näherungsweise als Dreieck betrachtet werden kann.
3. Begründen Sie, warum eine Seite dieses Dreiecks näherungsweise die Länge r hat und die dazugehörige Höhe näherungsweise $r\,d\theta$ beträgt.
4. Zeigen Sie damit: $dA = \frac{1}{2} r^2\, d\theta$.

3 Flächengeschwindigkeit und Drehimpuls

Für die Flächengeschwindigkeit betrachtet man die Fläche, die der Ortsvektor pro Zeit überstreicht. Für ein kleines Zeitintervall gilt $dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{r}\right|$.

Vergleichen Sie diese Vektorform mit Ihrer Dreiecksformel aus Abschnitt 2: Welcher Anteil von $d\vec{r}$ trägt zur Fläche bei, und welcher nicht?

1. Erklären Sie, warum $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ die Fläche eines Parallelogramms beschreibt.
2. Begründen Sie den Faktor $\frac{1}{2}$ in der Gleichung für dA.
3. Setzen Sie nun $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ in die Gleichung für dA ein. Teilen Sie anschließend durch dt.
4. Verwenden Sie die Definition des Drehimpulses

   $$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$

   und schreiben Sie Ihre Gleichung für die Flächengeschwindigkeit in Abhängigkeit von $\left|\vec{L}\right|$.
5. Warum folgt aus der Drehimpulserhaltung sofort, dass die Flächengeschwindigkeit konstant ist?
6. Formulieren Sie die Konsequenz in Worten: Was bedeutet das für die Bahnkurve und für die in gleichen Zeiten überstrichenen Flächen?

4 Flächensatz

Bei einer Zentralkraft zeigt die Kraft immer entlang des Ortsvektors. Daher verschwindet das Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}.$$

1. Begründen Sie aus $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$, warum $\vec{L}$ erhalten ist.
2. Warum bewegt sich der Massenpunkt in einer festen Ebene, wenn $\vec{L}$ erhalten ist?
3. Erklären Sie damit den Flächensatz bzw. das zweite Kepler'sche Gesetz in eigenen Worten.

5 Ellipsenfläche und Umlaufzeit

Während einer vollständigen Umlaufzeit T überstreicht der Planet die gesamte Ellipsenfläche. Für eine Ellipse mit großer Halbachse a und kleiner Halbachse b gilt

$$A_{\text{Ellipse}} = \pi ab.$$

1. Erklären Sie, wie die konstante Flächengeschwindigkeit, die Umlaufzeit T und die gesamte Ellipsenfläche zusammenhängen.
2. Stellen Sie diesen Zusammenhang als Gleichung auf und lösen Sie nach der Flächengeschwindigkeit auf.
3. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$
Welche Größen auf der rechten Seite sind bei einer elliptischen Bahn im Allgemeinen nicht konstant? Was bleibt trotzdem konstant?

6 Mittlere Bewegung n

Die mittlere Bewegung n beschreibt die mittlere Winkelgeschwindigkeit über einen vollständigen Umlauf:

$$n = \frac{2\pi}{T}.$$

1. Formen Sie die Definition nach $\frac{\pi}{T}$ um.
2. Setzen Sie Ihr Ergebnis in Ihre Gleichung für die Flächengeschwindigkeit einer Ellipse ein.
3. Erklären Sie den Unterschied zwischen der mittleren Bewegung n und der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

7 Die Zielgleichung in Ellipsenparametern

Sie haben nun zwei Ausdrücke für dieselbe konstante Flächengeschwindigkeit:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{und} \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{abn}{2}.$$

1. Setzen Sie beide Ausdrücke gleich.
2. Kürzen Sie geeignete Faktoren und lösen Sie nach $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ auf.
3. Multiplizieren Sie beide Seiten mit dt. Welche Gleichung erhalten Sie für $r^2\, d\theta$?
4. Lesen Sie die Gleichung physikalisch: Was passiert mit $d\theta$ in einem festen Zeitintervall dt, wenn r kleiner wird?