

Drei harmonische Oszillatoren herleiten

Thomas Weatherby

Theo I – Woche 4

1 Ziel

Sie leiten die Bewegungsgleichungen für drei Varianten des harmonischen Oszillators her:

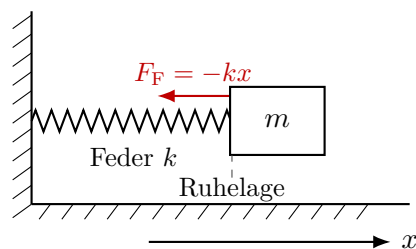
einfach \rightarrow gedämpft \rightarrow getrieben.

Dabei prüfen Sie jeweils, ob der vorherige Fall als Spezialfall wieder herauskommt.

2 Der einfache harmonische Oszillator

Aufgabe 1: Kräftebild lesen

Eine Masse m ist an einer Feder mit Federkonstante k befestigt. Die Auslenkung aus der Ruhelage sei $x(t)$. Reibung und äußere Antriebskraft werden zunächst vernachlässigt.



Für $x > 0$ zeigt die Federkraft nach links. Schreiben Sie das Kraftgesetz auf:

$$F_F = \underline{\hspace{10em}}$$

Warum ist das Vorzeichen negativ?

Aufgabe 2: Bewegungsgleichung herleiten

Verwenden Sie das zweite Newtonsche Gesetz:

$$m\ddot{x} = \sum F.$$

Setzen Sie die Federkraft ein:

$$m\ddot{x} = \underline{\hspace{10em}}$$

Bringen Sie die Gleichung in die Form

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Dafür gilt:

$$\omega_0^2 = \underline{\hspace{10em}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \underline{\hspace{10em}}$$

Aufgabe 3: Lösung bestimmen

Verwenden Sie den Exponentialansatz

$$x(t) = Ce^{rt}.$$

Dann gilt:

$$\dot{x} = \underline{\hspace{10em}}, \quad \ddot{x} = \underline{\hspace{10em}}.$$

Einsetzen in

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

ergibt die charakteristische Gleichung:

$$\underline{\hspace{10em}} = 0.$$

Die Nullstellen sind:

$$r_{1,2} = \underline{\hspace{10em}}.$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$x(t) = \underline{\hspace{10em}}.$$

Hinweis

Mini-Reflexion: Warum ist es physikalisch sinnvoll, dass die Lösung aus Sinus- und Cosinusfunktionen besteht?

3 Der gedämpfte harmonische Oszillator

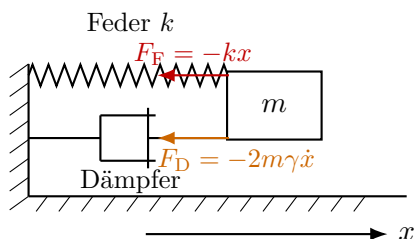
Aufgabe 4: Neue Kraft ergänzen

Nun wirkt zusätzlich eine Reibungskraft, die proportional zur Geschwindigkeit ist und der Bewegung entgegenwirkt:

$$F_D = -2m\gamma\dot{x}.$$

Die Federkraft bleibt:

$$F_F = -kx.$$



Für $x > 0$ und $\dot{x} > 0$ gilt:

$$F_F = \underline{\hspace{10em}}$$

$$F_D = \underline{\hspace{10em}}$$

Erklären Sie kurz, warum beide Kräfte in der Zeichnung nach links zeigen.

Aufgabe 5: Bewegungsgleichung herleiten

Verwenden Sie wieder

$$m\ddot{x} = \sum F.$$

Also:

$$m\ddot{x} = \underline{\hspace{15em}}.$$

Bringen Sie die Gleichung in die Standardform:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Dabei ist weiterhin:

$$\omega_0^2 = \underline{\hspace{10em}}.$$

Welche Rolle spielt γ ?

Aufgabe 6: Lösungsform herleiten

Verwenden Sie wieder

$$x(t) = Ce^{rt}.$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\underline{\hspace{15em}} = 0.$$

Lösen Sie diese quadratische Gleichung:

$$r_{1,2} = \underline{\hspace{15em}}.$$

Für den Schwingfall gilt

$$\omega_0 > \gamma.$$

Dann schreibt man:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Die Lösung hat dann die Form:

$$x(t) = \underline{\hspace{20em}}.$$

Aufgabe 7: Grenzfall prüfen

Der einfache harmonische Oszillator sollte als Spezialfall des gedämpften Oszillators herauskommen.

Setzen Sie dafür:

$$\gamma = 0.$$

Dann gilt:

$$\omega_d = \underline{\hspace{10em}}.$$

Die Lösung

$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))$$

wird zu:

$$x(t) = \underline{\hspace{20em}}.$$

Vergleichen Sie mit der Lösung aus Teil 1. Was stellen Sie fest?

4 Der getriebene harmonische Oszillator

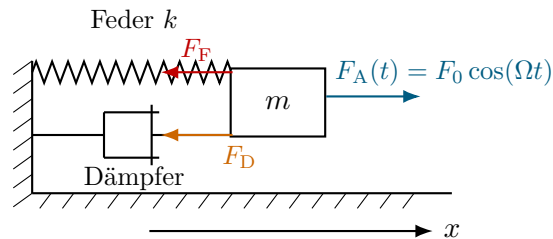
Aufgabe 8: Kräftebild für den getriebenen Oszillator

Nun wirkt zusätzlich eine äußere periodische Kraft:

$$F_A(t) = F_0 \cos(\Omega t).$$

Die drei Kräfte lauten also:

$$F_F = -kx, \quad F_D = -2m\gamma\dot{x}, \quad F_A(t) = F_0 \cos(\Omega t).$$



Ergänzen Sie die Summe der Kräfte:

$$\sum F = \underline{\hspace{15cm}}$$

Aufgabe 9: Bewegungsgleichung herleiten

Verwenden Sie:

$$m\ddot{x} = \sum F.$$

Also:

$$m\ddot{x} = \underline{\hspace{15cm}}$$

Bringen Sie die Gleichung in die Standardform:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t).$$

Markieren Sie in der Gleichung:

- den Beschleunigungsterm,
- den Dämpfungsterm,
- den Rückstellterm,
- den Antriebsterm.

Aufgabe 10: Struktur der Lösung erkennen

Die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

ist inhomogen.

Die allgemeine Lösung hat daher die Form:

$$x(t) = x_h(t) + X(t).$$

Dabei ist $x_h(t)$ die Lösung der homogenen Gleichung:

$$\text{_____} = 0.$$

Für den Schwingfall lautet diese:

$$x_h(t) = \text{_____}.$$

Für die partikuläre Lösung zur rechten Seite $\cos(\Omega t)$ wählen wir den Ansatz:

$$X(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t).$$

Warum braucht man im Allgemeinen sowohl Cosinus als auch Sinus?

Aufgabe 11: Allgemeine Lösungsstruktur

Schreiben Sie die allgemeine Lösung des getriebenen, gedämpften Oszillators im Schwingfall auf:

$$x(t) = \text{_____}.$$

Welcher Teil klingt mit der Zeit ab?

Welcher Teil bleibt langfristig erhalten?

5 Grenzfälle prüfen

Aufgabe 12: Ohne Antrieb

Setzen Sie im getriebenen Oszillator

$$F_0 = 0.$$

Aus

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

wird:

_____ = 0.

Welche Gleichung ist das?

Welche Lösung erwarten Sie?

$x(t) =$ _____.

Aufgabe 13: Ohne Antrieb und ohne Dämpfung

Setzen Sie zusätzlich

$$\gamma = 0.$$

Dann wird aus

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

die Gleichung:

_____ = 0.

Welche Lösung erwarten Sie?

$x(t) =$ _____.

Was sagt diese Grenzfallprüfung über die drei Modelle?

6 Resonanz und Ansatzwahl

Aufgabe 14: Resonanzfall erkennen

Betrachten Sie den **ungedämpften getriebenen Oszillator**:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t).$$

Für $\Omega \neq \omega_0$ ist der Ansatz

$$X(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

geeignet.

Was passiert aber, wenn

$$\Omega = \omega_0$$

gilt?

Dann ist der naive Ansatz:

$$X_{\text{naiv}}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

Die homogene Lösung lautet:

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t).$$

Erklären Sie, warum der naive Ansatz problematisch ist.

Aufgabe 15: Korrigierten Ansatz angeben

Im Resonanzfall muss der Ansatz mit einem Faktor t korrigiert werden.

Ein geeigneter Ansatz ist:

$$X(t) = t (A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)).$$

Für eine reine Cosinus-Anregung kann oft auch ein reduzierter Ansatz genügen:

$$X(t) = At \sin(\omega_0 t).$$

Was bedeutet der zusätzliche Faktor t physikalisch?

Hinweis

Wichtig: Beim gedämpften getriebenen Oszillator zeigt sich Resonanz vor allem daran, dass die stationäre Amplitude für bestimmte Antriebsfrequenzen besonders groß wird. Die Ansatzform muss dort normalerweise nicht geändert werden. Die besondere Ansatzkorrektur mit dem Faktor t tritt im idealisierten ungedämpften Resonanzfall auf.