Differentialgleichungen lösen – Methode der unbestimmten Koeffizienten

Thomas Weatherby

Theo I – Woche 3

1 Ziel

Sie üben eine systematische Methode für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t).$$

Die Grundidee ist:

$$\boxed{y(t) = y_{\mathrm{h}}(t) + Y(t)}$$

Dabei ist y_{h} die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und Y eine passende partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.

2 Aufwärmen: erste Ordnung

Wir beginnen mit Gleichungen erster Ordnung, weil der Exponentialansatz dort besonders klar sichtbar wird.

Methode für die homogene Gleichung erster Ordnung

Für

$$a\dot{y} + by = 0$$

probieren wir

$$y = C\mathrm{e}^{rt}.$$

Einsetzen ergibt die charakteristische Gleichung

$$ar + b = 0.$$

Also:

$$r = -\frac{b}{a}, \qquad y(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}.$$

Aufgabe 1: Homogene Gleichungen erster Ordnung

Lösen Sie die Gleichungen mit dem Ansatz $y = C\mathrm{e}^{rt}$.

1. $\dot{y} + 3y = 0$

2. $2\dot{y} - 5y = 0$

3. $\dot{y} + \omega y = 0$

4. Physikalischer Kontext: Ein Körper erfährt eine Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit.

$$m\dot{v} + \gamma v = 0.$$

   Bestimmen Sie $v(t)$.

Aufgabe 2: Erste Ordnung mit einfacher inhomogener rechter Seite

Hier ist die rechte Seite konstant. Probieren Sie zusätzlich zur homogenen Lösung eine konstante partikuläre Lösung $Y = A$.

$$\dot{y} + 2y = 6.$$

1. Homogene Lösung:

$$y_{\mathrm{h}}(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$

2. Ansatz für eine partikuläre Lösung:

$$Y(t) = \underline{\hspace{5cm}}$$

3. Einsetzen und A bestimmen:

4. Allgemeine Lösung:

$$y(t) = \underline{\hspace{10cm}}$$

3 Homogene Gleichungen zweiter Ordnung

Jetzt betrachten wir Gleichungen der Form

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0.$$

Methode für die homogene Gleichung zweiter Ordnung

Ansatz:

$$y = C\mathrm{e}^{rt}.$$

Einsetzen ergibt:

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Zwei reelle Nullstellen $r_1 \neq r_2$	$y_{\mathrm{h}} = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}$
Doppelte Nullstelle r	$y_{\mathrm{h}} = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{rt}$
Komplexe Nullstellen $r = \lambda \pm i\mu$	$y_{\mathrm{h}} = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(C_1\cos(\mu t) + C_2\sin(\mu t)\right)$

Aufgabe 3: Nur homogene Lösungen

Bestimmen Sie jeweils die charakteristische Gleichung, die Nullstellen und die allgemeine homogene Lösung.

1. $$\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0.$$

2. $$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0.$$

3. $$\ddot{y} + 9y = 0.$$

4. Physikalischer Kontext: ungedämpfter harmonischer Oszillator
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

4 Inhomogene Gleichungen: Ansatz wählen

Methode der unbestimmten Koeffizienten

Für
$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$$
gehen wir so vor:

1. Homogene Lösung y_{h} bestimmen.
2. Falls nötig: rechte Seite zerlegen,
$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) + \dots$$
3. Für jeden Term $g_i(t)$ einen passenden Ansatz $Y_i(t)$ wählen.
4. Alle partikulären Ansätze addieren:
$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) + \dots$$
5. Y einsetzen und die unbekannten Koeffizienten bestimmen.
6. Erst am Ende: gegebene Anfangs- oder Randbedingungen einsetzen.

Ansatztabelle

$P_n(t)$ bezeichnet ein Polynom vom Grad n, also z. B. $P_2(t) = \alpha t^2 + \beta t + \delta$.

Term in $g(t)$		**Ansatz für** $Y(t)$
$P_n(t)$		$t^s(A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0)$
$P_n(t)e^{\lambda t}$		$t^s(A_n t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \cdots + A_1 t + A_0)e^{\lambda t}$
$P_n(t)e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ $P_n(t)e^{\lambda t}\sin(\mu t)$	und/oder	$t^s(Q_n(t))e^{\lambda t}\cos(\mu t) + t^s(R_n(t))e^{\lambda t}\sin(\mu t)$

Dabei sind $Q_n(t)$ und $R_n(t)$ allgemeine Polynome vom Grad n mit verschiedenen unbestimmten Koeffizienten.

Aufgabe 4: Nur den Ansatz wählen

Bestimmen Sie *nur* einen geeigneten Ansatz für $Y(t)$. Noch nicht einsetzen.

1. $$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 5t^2 - 4t + 1.$$

   $Y(t) =$ ______________________________

2. $$\ddot{y} - y = (3t - 1)e^{2t}.$$

   $Y(t) =$ ______________________________

3. $$\ddot{y} + 4\dot{y} + 8y = 7e^{-t}\cos(3t).$$

   $Y(t) =$ ______________________________

4. $$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 2t + 3e^t - \cos(t).$$

   $Y(t) =$ ______________________________

5 Inhomogene Gleichungen: die drei Grundtypen

Typ A: Polynom auf der rechten Seite

1. Lösen Sie:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4t - 1.$$

   (a) Homogene Lösung:

   (b) Ansatz:

$$Y(t) = \underline{\hspace{6cm}}$$

   (c) Einsetzen:

   (d) Allgemeine Lösung:

$$y(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$

Typ B: Polynom mal Exponentialfunktion

1. Lösen Sie:

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = (2t + 1)\mathrm{e}^{3t}.$$

   (a) Homogene Lösung:

   (b) Ansatz:

$$Y(t) = \underline{\hspace{6cm}}$$

   (c) Einsetzen und Koeffizienten bestimmen:

   (d) Allgemeine Lösung:

$$y(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$

Typ C: Sinus/Cosinus, ggf. mit Exponentialfaktor

1. Lösen Sie:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 8y = \mathrm{e}^{-t}\cos(2t).$$

   (a) Homogene Lösung:

   (b) Ansatz:

$$Y(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

   (c) Einsetzen und Koeffizienten bestimmen:

   (d) Allgemeine Lösung:

$$y(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Typ D: Zusammengesetzte rechte Seite

1. Lösen Sie:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = t + 2\mathrm{e}^{t} + 3\cos(t).$$

   (a) Zerlegen Sie die rechte Seite:

$$g_1(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad g_2(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad g_3(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

   (b) Wählen Sie für jeden Term einen Ansatz:

$$Y_1(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$Y_2(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$Y_3(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

   (c) Gesamtansatz:

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t) + Y_3(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

   (d) Lösen Sie die Gleichung vollständig.

6 Zusatzüberlegung: Wann braucht man den Faktor t^s?

Merksatz zu s

Der gewählte Ansatz für $Y(t)$ darf keinen Term enthalten, der schon in der homogenen Lösung $y_\mathrm{h}(t)$ vorkommt.

Falls doch, multiplizieren wir den Ansatz mit t^s.

$$s = \text{kleinste Zahl, sodass kein Term des Ansatzes mehr in } y_\mathrm{h} \text{ vorkommt.}$$

Bei Differentialgleichungen zweiter Ordnung gilt typischerweise:

$$s = 0,\ 1 \text{ oder } 2.$$

Aufgabe 9: Resonanz erkennen und s bestimmen

Bestimmen Sie $y_\mathrm{h}(t)$, den naiven Ansatz und den korrigierten Ansatz.

1. Erste Ordnung:
$$\dot{y} - 2y = \mathrm{e}^{2t}.$$
$$y_\mathrm{h}(t) = \underline{\hspace{6cm}}$$
Naiver Ansatz:
$$Y_\mathrm{naiv}(t) = \underline{\hspace{6cm}}$$
Korrigierter Ansatz:
$$Y(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$

2. Einfache Überlappung:
$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = \mathrm{e}^{t}.$$
$$y_\mathrm{h}(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$
Naiver Ansatz:
$$Y_\mathrm{naiv}(t) = \underline{\hspace{6cm}}$$
Korrigierter Ansatz:
$$Y(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$

3. Doppelte Überlappung:
$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = \mathrm{e}^{t}.$$
$$y_\mathrm{h}(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$
Naiver Ansatz:
$$Y_\mathrm{naiv}(t) = \underline{\hspace{6cm}}$$
Korrigierter Ansatz:
$$Y(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$

4. Trigonometrische Resonanz:
$$\ddot{y} + 4y = \sin(2t).$$
$$y_\mathrm{h}(t) = \underline{\hspace{8cm}}$$
Naiver Ansatz:
$$Y_\mathrm{naiv}(t) = \underline{\hspace{9cm}}$$
Korrigierter Ansatz:
$$Y(t) = \underline{\hspace{10cm}}$$

7 Abschlussaufgaben mit Rahmenbedingungen

Wichtig

Bei Rahmenbedingungen gilt dieselbe Reihenfolge wie oben:

$$\boxed{\text{Erst allgemeine Lösung finden, dann Bedingungen einsetzen.}}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 gehören zur homogenen Lösung. Sie werden erst am Ende bestimmt.

Aufgabe 10: Anfangsbedingungen bei Resonanz

Lösen Sie vollständig:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = \mathrm{e}^{-t}, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 1.$$

1. Homogene Lösung bestimmen.

2. Entscheiden Sie, welcher Wert von s gebraucht wird.

3. Partikuläre Lösung bestimmen.

4. Allgemeine Lösung $x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + X(t)$ aufstellen.

5. Anfangsbedingungen einsetzen und C_1, C_2 bestimmen.

Aufgabe 11: Randbedingungen an zwei Zeitpunkten

Lösen Sie vollständig:

$$\ddot{y} + 4y = 8\sin(2t), \qquad y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

1. Homogene Lösung bestimmen.

2. Erklären Sie, warum hier $s \neq 0$ gilt.

3. Partikuläre Lösung bestimmen.

4. Allgemeine Lösung aufstellen.

5. Randbedingungen einsetzen und C_1, C_2 bestimmen.