

Differentialgleichungen lösen – Lösungen

Thomas Weatherby

Theo I – Woche 3

Aufgabe 1

1. $\dot{y} + 3y = 0$: $r + 3 = 0$, also

$$y(t) = Ce^{-3t}.$$

2. $2\dot{y} - 5y = 0$: $2r - 5 = 0$, also

$$y(t) = Ce^{\frac{5}{2}t}.$$

3. $\dot{y} + \omega y = 0$: $r + \omega = 0$, also

$$y(t) = Ce^{-\omega t}.$$

4. $m\dot{v} + \gamma v = 0$: $mr + \gamma = 0$, also

$$v(t) = Ce^{-\frac{\gamma}{m}t}.$$

Falls $v(0) = v_0$ gegeben ist, gilt $C = v_0$.

Aufgabe 2

$$\dot{y} + 2y = 6.$$

Die homogene Gleichung liefert

$$y_h(t) = Ce^{-2t}.$$

Für eine konstante rechte Seite wählen wir $Y(t) = A$. Einsetzen ergibt

$$0 + 2A = 6, \quad A = 3.$$

Damit ist

$$y(t) = Ce^{-2t} + 3.$$

Aufgabe 3

1.

$$\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0, \quad r^2 - 5r + 6 = (r - 2)(r - 3).$$

Also

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

2.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0, \quad r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2.$$

Also

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}.$$

3.

$$\ddot{y} + 9y = 0, \quad r^2 + 9 = 0, \quad r = \pm 3i.$$

Also

$$y(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t).$$

4.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad r = \pm i\omega_0.$$

Also

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t).$$

Aufgabe 4

1.

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 5t^2 - 4t + 1.$$

Ein passender Ansatz ist

$$Y(t) = At^2 + Bt + D.$$

2.

$$\ddot{y} - y = (3t - 1)e^{2t}.$$

Ein passender Ansatz ist

$$Y(t) = (At + B)e^{2t}.$$

3.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 8y = 7e^{-t} \cos(3t).$$

Ein passender Ansatz ist

$$Y(t) = e^{-t}(A \cos(3t) + B \sin(3t)).$$

4.

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 2t + 3e^t - \cos(t).$$

Ein passender Ansatz ist

$$Y(t) = At + B + Ce^t + D \cos(t) + E \sin(t).$$

Aufgabe 5

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4t - 1.$$

Homogen:

$$r^2 + 3r + 2 = (r + 1)(r + 2), \quad y_h = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Ansatz:

$$Y = At + B.$$

Dann gilt $Y' = A$ und $Y'' = 0$. Einsetzen:

$$0 + 3A + 2(At + B) = 4t - 1.$$

Koeffizientenvergleich:

$$2A = 4, \quad 3A + 2B = -1.$$

Also $A = 2$ und $B = -\frac{7}{2}$. Damit

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 2t - \frac{7}{2}.$$

Aufgabe 6

$$\ddot{y} - \dot{y} - 2y = (2t + 1)e^{3t}.$$

Homogen:

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1), \quad y_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}.$$

Ansatz:

$$Y = (At + B)e^{3t}.$$

Für $u = At + B$ gilt

$$(D^2 - D - 2)(e^{3t}u) = e^{3t}(D^2 + 5D + 4)u.$$

Also

$$e^{3t}(4At + 5A + 4B) = (2t + 1)e^{3t}.$$

Koeffizientenvergleich:

$$4A = 2, \quad 5A + 4B = 1.$$

Daraus folgt

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{3}{8}.$$

Damit

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} + \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{8}\right)e^{3t}.$$

Aufgabe 7

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 8y = e^{-t} \cos(2t).$$

Homogen:

$$r^2 + 4r + 8 = 0, \quad r = -2 \pm 2i.$$

Also

$$y_h = e^{-2t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)).$$

Ansatz:

$$Y = e^{-t}(A \cos(2t) + B \sin(2t)).$$

Mit dem komplexen Ansatz gilt

$$\lambda = -1 + 2i, \quad \lambda^2 + 4\lambda + 8 = 1 + 4i.$$

Daher

$$\frac{1}{1 + 4i} = \frac{1 - 4i}{17}.$$

Die reelle partikuläre Lösung ist

$$Y = e^{-t} \left(\frac{1}{17} \cos(2t) + \frac{4}{17} \sin(2t) \right).$$

Damit

$$y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)) + e^{-t} \left(\frac{1}{17} \cos(2t) + \frac{4}{17} \sin(2t) \right).$$

Aufgabe 8

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = t + 2e^t + 3 \cos(t).$$

Homogen:

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3), \quad y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Zerlegung:

$$g_1(t) = t, \quad g_2(t) = 2e^t, \quad g_3(t) = 3 \cos(t).$$

Ansatz:

$$Y_1 = At + B, \quad Y_2 = Ce^t, \quad Y_3 = D \cos(t) + E \sin(t).$$

Für Y_1 :

$$6At + 5A + 6B = t, \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{5}{36}.$$

Für Y_2 :

$$(1 + 5 + 6)Ce^t = 2e^t, \quad C = \frac{1}{6}.$$

Für Y_3 :

$$\begin{aligned} (D \cos + E \sin)'' + 5(D \cos + E \sin)' + 6(D \cos + E \sin) \\ = (5D + 5E) \cos(t) + (5E - 5D) \sin(t). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit $3 \cos(t)$ ergibt

$$D + E = \frac{3}{5}, \quad E - D = 0, \quad D = E = \frac{3}{10}.$$

Damit

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}t - \frac{5}{36} + \frac{1}{6}e^t + \frac{3}{10} \cos(t) + \frac{3}{10} \sin(t).$$

Aufgabe 9

1.

$$\begin{aligned} \dot{y} - 2y &= e^{2t}. \\ y_h &= Ce^{2t}, \quad Y_{\text{naiv}} = Ae^{2t}, \quad Y = Ate^{2t}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y &= e^t. \\ r^2 - 3r + 2 &= (r - 1)(r - 2), \quad y_h = C_1 e^t + C_2 e^{2t}. \\ Y_{\text{naiv}} &= Ae^t, \quad Y = Ate^t. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \ddot{y} - 2\dot{y} + y &= e^t. \\ r^2 - 2r + 1 &= (r - 1)^2, \quad y_h = (C_1 + C_2 t)e^t. \\ Y_{\text{naiv}} &= Ae^t, \quad Y = At^2 e^t. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 4y &= \sin(2t). \\ y_h &= C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t). \\ Y_{\text{naiv}} &= A \cos(2t) + B \sin(2t), \quad Y = t(A \cos(2t) + B \sin(2t)). \end{aligned}$$

Aufgabe 10

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Homogen:

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2, \quad x_h = (C_1 + C_2 t)e^{-t}.$$

Da e^{-t} bereits mit Vielfachheit 2 in der homogenen Lösung vorkommt, gilt $s = 2$. Ansatz:

$$X = At^2 e^{-t}.$$

Mit $(D + 1)^2$ gilt

$$(D^2 + 2D + 1)(At^2 e^{-t}) = e^{-t} D^2(At^2) = 2Ae^{-t}.$$

Also $2A = 1$ und

$$X = \frac{1}{2}t^2 e^{-t}.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = e^{-t} \left(C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2 \right).$$

Aus $x(0) = 0$ folgt $C_1 = 0$. Setze

$$f(t) = C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2, \quad x'(t) = e^{-t}(f'(t) - f(t)).$$

Dann

$$x'(0) = C_2 - C_1 = 1, \quad C_2 = 1.$$

Damit

$$x(t) = e^{-t} \left(t + \frac{1}{2}t^2 \right).$$

Aufgabe 11

$$\ddot{y} + 4y = 8 \sin(2t), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Homogen:

$$r^2 + 4 = 0, \quad r = \pm 2i, \quad y_h = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t).$$

Der naive Ansatz $A \cos(2t) + B \sin(2t)$ liegt bereits in der homogenen Lösung. Deshalb gilt $s = 1$.

Ansatz:

$$Y = t(A \cos(2t) + B \sin(2t)).$$

Einsetzen liefert

$$Y'' + 4Y = 4B \cos(2t) - 4A \sin(2t).$$

Vergleich mit $8 \sin(2t)$:

$$4B = 0, \quad -4A = 8, \quad A = -2, \quad B = 0.$$

Also

$$Y = -2t \cos(2t).$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) - 2t \cos(2t).$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $C_1 = 0$. Weiter:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2.$$

Also $C_2 = 1$ und

$$y(t) = \sin(2t) - 2t \cos(2t).$$