Vektoroperationen – Kartesische Koordinaten

Thomas Weatherby

Theo III – Woche 2

1 Differentiation eines Vektors nach einem Parameter

Eine Vektorfunktion $\vec{r}(t)$ beschreibt eine Kurve im Raum. Die erste Ableitung ist die Geschwindigkeit, die zweite Ableitung die Beschleunigung.

1. Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung folgender Vektorfunktionen:

$$\text{(a)} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 - 1 \\ \ln(t+1) \end{pmatrix}, \quad t > -1, \qquad \text{(b)} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ ct \end{pmatrix},$$

$$\text{(c)} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t}\cos(\omega t) \\ e^{-\lambda t}\sin(\omega t) \\ h(1 - e^{-\lambda t}) \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

2. Deuten Sie die drei Funktionen geometrisch.
   (a) Welche Kurve liegt in einer Ebene, welche ist eine Schraubenlinie, welche nähert sich einer Grenzhöhe?
   (b) Welche Parameter bestimmen Radius, Steigung, Winkelgeschwindigkeit und Abklingen?
   (c) Skizzieren Sie jede Kurve grob und tragen Sie an einem Punkt einen Geschwindigkeitsvektor ein.

3. Betrachten Sie die Schraubenlinie aus Aufgabe 1(b).
   (a) Zeigen Sie, dass der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist.
   (b) Berechnen Sie $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$ und erklären Sie die Bedeutung des Ergebnisses.
   (c) Was ändert sich an Bahn und Bewegung, wenn $c = 0$ gilt?

2 Gradient eines Skalarfeldes

Die Definition des Gradienten in kartesischen Koordinaten lautet

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Der Gradient zeigt in die Richtung des stärksten lokalen Anstiegs.

1. Bestimmen Sie den Gradienten folgender skalarer Funktionen:

$$\text{(a)} \quad \varphi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2, \qquad \text{(b)} \quad \varphi(x, y, z) = e^{-x}\sin y + z^2,$$

$$\text{(c)} \quad \varphi(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + xz, \quad \text{(d)} \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2}}, \quad a > 0.$$

2. Bestimmen Sie Richtung und Betrag des größten Anstiegs von

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2$$

im Punkt $P = (1, -1, 2)$.

3. Berechnen Sie die Richtungsableitung von

$$\varphi(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + xz$$

im Punkt $Q = (0, 1, 2)$ in Richtung

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Erklären Sie an einem physikalischen Beispiel, was der Gradient bedeutet. Warum zeigt eine Kraft $\vec{F} = -\nabla U$ in Richtung des stärksten Abfalls der potentiellen Energie?

3 Divergenz eines Vektorfeldes

Die Definition der Divergenz in kartesischen Koordinaten lautet

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Die Divergenz beschreibt lokal, ob ein Feld wie eine Quelle, eine Senke oder quellenfrei wirkt.

1. Bestimmen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

$$\text{(a)} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -2z^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{(d)} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \\ z \end{pmatrix}.$$

2. Bestimmen Sie die Divergenz von $\vec{F} = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ -2z^2 \end{pmatrix}$ in den Punkten $P = (1, 2, 1)$ und $Q = (1, 2, -1)$.

   Was bedeutet jeweils das Vorzeichen?

3. Entscheiden Sie ohne Rechnung, welches der Diagramme in Abschnitt 5 am ehesten eine positive Divergenz zeigt. Begründen Sie kurz.

4. Warum kann ein Feld mit langen Pfeilen trotzdem Divergenz 0 haben? Formulieren Sie die Antwort so, dass sie nicht nur auf Pfeillängen, sondern auf lokale Zu- und Abflüsse Bezug nimmt.

4 Rotation eines Vektorfeldes

Die Definition der Rotation in kartesischen Koordinaten lautet

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Die Rotation beschreibt die lokale Wirbeltendenz eines Feldes.

1. Bestimmen Sie die Rotation folgender Vektorfelder:

$$\text{(a)}\quad \vec{G} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \vec{G} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{(c)}\quad \vec{G} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix},$$

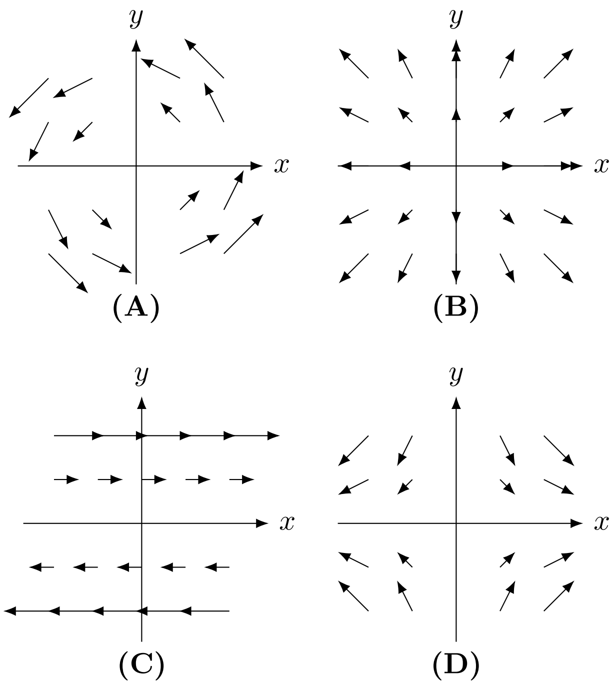
$$\text{(d)}\quad \vec{G} = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ az \end{pmatrix}.$$

2. Welche der Felder beschreibt eine starre Rotation um die z-Achse? Welche Pfeile zeigen vom Ursprung weg, ohne lokal zu rotieren?

3. Berechnen Sie $\nabla \times (\nabla\varphi)$ für $\varphi = x^2 + 2y^2 - z^2$. Was erwarten Sie allgemein für die Rotation eines Gradientenfeldes?

5 Interpretation von Diagrammen

Die folgenden Diagramme zeigen Vektorfelder in der xy-Ebene. Die Pfeile sind qualitativ gezeichnet; entscheidend ist die lokale Struktur.



1. Betrachten Sie die Diagramme zuerst nur mit dem Auge. Notieren Sie zu jedem Bild einen ersten Eindruck: Quelle, Senke, Wirbel, Scherung, Sattel oder unklar. Keine Rechnung, keine Begründung.

2. Ordnen Sie die Diagramme den Feldern zu:

$$\vec{F}_1(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_2(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_3(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{F}_4(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

3. Bestimmen Sie zu jedem Feld die Divergenz und die z-Komponente der Rotation.

4. Beschreiben Sie jedes Diagramm mit einem passenden Begriff: Quelle, Senke, Wirbel, Scherung oder Sattel. Falls ein Begriff nicht passt, erklären Sie kurz warum.

5. In welchem Diagramm würde sich ein kleines Schaufelrad drehen? In welchem Diagramm würden benachbarte Teilchen im Mittel auseinanderlaufen?